Modele konstytutywne kompozytowych materiałów z włóknami i modele siatek do zbrojenia nawierzchni

Dr hab. inż. Stanisław JEMIOŁO

Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich
Politechnika Warszawska

Ta część opracowania jest kontynuacją i uzupełnieniem pkt.1.3-1.5 Załącznika 1 do Sprawozdania WS-02 z 2005 roku. Podstawowe oznaczenia są identyczne jak w wymienionym Załączniku.

Wprowadzamy następującą umowę odnośnie numerowania wzorów i rysunków: zamiast numeru wzoru (I.1.2.3) będziemy pisać (2.3) w danym podpunkcie, natomiast przy powoływaniu się na dany wzór w innych podpunktach będziemy używali pełnej numeracji (analogiczna umowa dotyczy rysunków). Powołując się na wzory i rysunki z wymienionego Sprawozdania będziemy pisali (S.1.4.1), itp.

I. Modele kompozytów o izotropowej matrycy zbrojonej regularną siatką

Przedstawione w tym punkcie modele kompozytów włóknistych mogą być punktem wyjścia do opracowania modelu teoretycznego warstwy konstrukcyjnej nawierzchni drogowej o pewnej umownej i reprezentatywnej grubości ze zbrojeniem w postaci regularnej siatki. Podstawowym celem jest sformułowanie najprostszych anizotropowych relacji konstytutywnych sprężystości. Pokażemy także ich interpretacje i uogólnienie oraz uwagi o zastosowaniach i implementacjach numerycznych w programach MES, takich jak np. ABAQUS.

Sformułujemy także modele aproksymacyjne (w ramach liniowej teorii sprężystości), które są związkami izotropowymi, co pozwala na ich bezpośrednie zastosowanie w standardowych programach wspomagających projektowanie konstrukcji nawierzchni, takich jak np. BISAR, NOAH, ELSYM 5M, JULEA, VEROAD.

1. Uwagi wstępne

Zanim przystąpimy do prezentacji modelu konstytutywnego materiału zbrojonego siatką przytaczamy w pkt.1.1 podstawowe pojęcia stosowane w mechanice kompozytów, która jest teorią fenomenologiczną. Następnie w pkt.1.2 zamieszczamy podstawowe idee wyznaczenia sprężystych własności efektywnych kompozytu dwuskładnikowego (na przykładzie modelu jednowymiarowego) w tzw. podejściu energetycznym. Podamy także uwagi o sposobie wyznaczenia dolnych i górnych oszacowań sztywności kompozytu.

1.1. Podstawowe pojęcia mechaniki kompozytów

Dotychczas brak ogólnie przyjętej ścisłej definicji kompozytu i do kompozytów zalicza się przeważnie materiały wytworzone przez człowieka w wyniku mieszania kilku składników. Celem jest uzyskanie materiału łączącego zalety składników mieszaniny oraz niwelującego ich wady Materiał taki nazywa się *kompozytem*. Właściwości kompozytu istotnie różnią się od właściwości poszczególnych składników mieszaniny. Należy wyraźnie podkreślić, że termin kompozyt odnosi się do takiego połączenia różnych składników, który nie ma charakteru związku chemicznego albo roztworu. Kompozyt jest materiałem monolitycznym, ale o wyraźnej mikrostrukturze z widocznymi granicami między składnikami. Teoretycznym opisem właściwości mechanicznych materiałów kompozytowych zajmuje się *mechanika kompozytów*. Jest to interdyscyplinarna dziedzina wiedzy, której podstawowym celem jest m.in. przewidywanie i wyznaczenie tzw. efektywnych właściwości mechanicznych kompozytu. W celu wyznaczenia własności efektywnych kompozytu konieczne jest wprowadzenie pojęcia *reprezentatywnej objętości kompozytu* albo np. *komórki periodyczności kompozytu*, co stosuje się m.in. w teorii homogenizacji (patrz np. monografia Nemata-Nassera i Hori (1993)). Reprezentatywna objętość kompozytu zależy oczywiście od jego mikrostruktury i wymiarów składników. Jej określenie jest także konieczne do wyznaczenia podstawowych cech mechanicznych kompozytu w typowych badaniach doświadczalnych.

Klasyfikację kompozytów dokonuje się wg różnych kryteriów, od podstawowych takich jak: podział w zależności od pochodzenia, czyli kompozyty naturalne oraz kompozyty zaprojektowane i wytwarzane przez człowieka, podział według przeznaczenia, tzn. kompozyty konstrukcyjne i in., aż po kryteria dotyczące rodzaju osnowy (matrycy) i kształtu składnika wzmacniającego, sposobu łączenia składników i technologii wytwarzania oraz otrzymanej mikrostruktury kompozytu, por. np. Garbarski (2001).

Na przykład w klasyfikacji kompozytów wg kryterium kształtu składnika wzmacniającego wyróżnia się: a) *kompozyty wzmocnione włóknem ciągłym* albo krótkim (ciętym), b) kompozyty wzmocnione dyspersyjnie, c) *kompozyty wzmocnione cząstkami*. Wymienione kompozyty różnią się od siebie mikrostrukturą. W kompozytach wzmocnionych dyspersyjnie osnowa jest zwykle metalem, w którym równomiernie rozłożone są cząstki o wymiarach $0.01-0.1\ \mu\text{m}$ w ilości 1-15%. Głównym mechanizmem wzmocnienia jest hamowanie ruchu dyslokacji. Kompozyty umacniane cząstkami zawierają do 25% cząstek, których wymiary przekraczają $1\ \mu\text{m}$, gdzie mechanizm wzmocnienia polega na ograniczeniu odkształcalności osnowy. W kompozytach wzmacnianych włóknami, o średnicy włókien od ułamków μm do kilku mm i udziale objętościowym od kilku do kilkudziesięciu %, rola osnowy sprowadza się do przeniesienia obciążenia przez włókno.

Niezmiernie ważne dla prawidłowej pracy kompozytu jest dobre połączenie osnowy ze zbrojeniem, co w wielu przypadkach wymaga specjalnego przygotowania powierzchni zbrojenia (np. pokrycia specjalnymi warstewkami, trawienia) i odpowiednich warunków technologicznych łączenia. Strefa połączenia osnowy ze zbrojeniem może wykazywać obniżoną wytrzymałość. Jako osnowę stosuje się m.in. polimery syntetyczne (np. żywice epoksydowe lub poliestrowe), metale (np. tytan, glin, miedź, nikiel), tworzywa ceramiczne. Zbrojenie ma zwykle postać drobnych cząstek (np. tlenki: Al_2O_3, ZrO_2, ThO_2) lub włókien o dużej wytrzymałości i sprężystości (np. szklanych, grafitowych, borowych, kwarcowych, korundowych, organicznych, z węglika krzemu); włókna stosuje się w postaci pasm włókien elementarnych (np. rowing) lub tkanin, mat itp.

W zależności od mikrostruktury kompozytu otrzymuje się materiały *niejednorodne* o *izotropowych* albo *anizotropowych* własnościach mechanicznych.

W sensie przedstawionych powyżej definicji niektóre z materiałów stosowanych w warstwach konstrukcyjnych nawierzchni drogowych i lotniskowych są kompozytami. Na przykład beton asfaltowy jest kompozytem wzmocnionym cząstkami. Rolę osnowy pełni lepiszcze asfaltowe, zaś kruszywo pełni rolę zbrojenia (por. np. monografię Piłata i Radziszewskiego (2004) o nawierzchniach asfaltowych). Makroskopowo beton asfaltowy ma izotropowe własności mechaniczne. Geosiatki stosowane w funkcji zbrojenia warstw konstrukcyjnych nawierzchni drogowych mają anizotropowe własności mechaniczne, por. np.

Perkins (2000). W dalszych punktach opracowania zaproponujemy modele konstytutywne warstwy zbrojonej siatką, które w najprostszym modelu będą interpretowane jako dwuskładnikowy kompozyt o izotropowej matrycy z dwukierunkowym zbrojeniem. Efektywne, makroskopowe własności mechaniczne takiego kompozytu są ortotropowe (jest to pewien szczególny przypadek anizotropii, por. pkt.S.1.4-1.5).

Wstępny dobór komponentów może polegać na przewidywaniu tzw. sumarycznych i wynikowych właściwości kompozytu. *Właściwości sumaryczne* (addytywne) uzyskuje się przez sumowanie właściwości składników, przyjmując ich udział we właściwościach kompozytu za proporcjonalny do udziału objętościowego lub powierzchniowego w danym przekroju; *właściwości wynikowe* (synergiczne) są rezultatem przeniesienia efektu wywołanego w jednym komponencie na drugi, wskutek czego powstaje inny efekt przyjmowany jako właściwość kompozytu.

Najprostszym przykładem określenia własności sumarycznych może być sposób wyznaczenia modułu Younga E_1, w kompozytach wzmacnianych włóknem ciągłym w kierunku włókien, który często wyznacza się z następującej zależności, por. np. Dąbrowski (1989):

(1.1) $$E_1 = (1-p)E_m + pE_w ,$$

gdzie $p \in (0,1)$ jest udziałem objętościowym włókien, natomiast E_m i E_w są odpowiednio modułami Younga izotropowej matrycy i włókna. Wzór (1.1) wynika z rozwiązania zadania jednoosiowego rozciągania reprezentatywnej próbki kompozytu, w którym zakłada się uśrednienie naprężenia i odkształcenia po objętości próbki, addytywność naprężeń składników kompozytu oraz jednakowe odkształcenia w matrycy i w włóknie, tzn.:

(1.2) $$\sigma = (1-p)\sigma_m + p\sigma_w = [(1-p)E_m + pE_w]\varepsilon \equiv E_1\varepsilon .$$

Często naprężenia σ_m i σ_w, odpowiednio w matrycy i we włóknie, nazywa się mikronaprężeniami w składnikach kompozytu, w odróżnieniu od naprężenia σ, które nazywa się makronaprężeniem. W modelu przestrzennym liniowo-sprężystego kompozytu włóknistego należy wyznaczyć pozostałe tzw. efektywne stałe sprężystości występujące w związku Hooke'a, gdyż makroskopowo kompozyt jest materiałem transwersalnie izotropowym, co wymaga określenia pięciu niezależnych składowych macierzy sztywności albo podatności, patrz pkt.S.1.4, w szczególności wzór (S.1.4.13). Sposób wyznaczenia elementów macierzy podatności i technicznych stałych sprężystości zamieszczony jest w podręczniku Dąbrowskiego (1989), str.59-70. Także w wymienionej pracy wyznaczone są efektywne stałe sprężystości kompozytu zbrojonego dwukierunkowo. Matryca zbrojona dwukierunkowo jest makroskopowo materiałem ortotropowym. Nie cytujemy tych wyników, gdyż nie będziemy ich stosować w tym opracowaniu. Zasygnalizowany tu sposób postępowania nazywa się metodą bezpośrednią (*direct approach*) wyznaczenia efektywnych własności kompozytu, patrz artykuły Hashina i Rosena (1964) oraz Hashina (1983). Należy podkreślić, że podejście to znalazło także zastosowania w projektowaniu laminatów (kompozytów o budowie warstwowej), które często stosuje się jako powierzchniowe elementy konstrukcyjne np. w samolotach, samochodach i jachtach, itp.

1.2. Wyznaczenie sprężystych własności efektywnych metodą energetyczną

W celu wyprowadzenia w pkt.1.2 własności efektywnych kompozytu dwukierunkowo zbrojonego zastosujemy podejście energetyczne. W punkcie tym zilustrujemy to na przykładzie modelu jednowymiarowego, w którym matryca zbrojona jest cząstkami. Celem tego prostego rachunkowo przykładu jest wprowadzenie podstawowych pojęć i interpretacji.

Wprowadzamy następujące oznaczenia: $E_m \equiv E_1$ i $E_{cz} \equiv E_2$ są *modułami Younga* odpowiednio matrycy i cząstek o udziale objętościowym $p \in (0,1)$. Niech σ i ε oznaczają uśrednione (po reprezentatywnej objętości próbki) naprężenia i odkształcenia, nazywane często naprężeniami i odkształceniami makroskopowymi. W sprężystości obowiązuje następująca zależność, por. np. Jemioło (1999, 2003) i literaturę tam cytowaną:

$$W(\varepsilon) + W^*(\sigma) = \sigma\varepsilon, \tag{2.1}$$

gdzie $W(\varepsilon) \geq 0, W(0) = 0$, jest jednostkową energią sprężystości, a $W^*(\sigma) \geq 0, W^*(0) = 0$, jest funkcją dopełniającą do W (nazywaną nieprecyzyjnie energią komplementarną), natomiast prawa strona wzoru (2.1) ma interpretację jednostkowej pracy naprężeń σ na odkształceniach ε. Jeżeli funkcje W i W^* są wypukłe, to

$$\sigma = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \qquad \text{oraz} \qquad \varepsilon = \frac{\partial W^*(\sigma)}{\partial \sigma} \; . \tag{2.2}$$

Zależności (2.2) definiują ogólną postać makroskopowych relacji konstytutywnych sprężystości. Napisaliśmy w (2.2) pochodne cząstkowe, gdyż np. energia sprężystości W może być także funkcją temperatury T (w kelwinach), co z punktu widzenia termodynamiki oznacza, że rozpatrujemy procesy izotermiczne.

Wobec (2.2) mamy dwa podstawowe sposoby sformułowania związków fizycznych rozpatrywanego kompozytu. W modelu 1 zakładamy uśrednienie energii sprężystości, a w modelu 2 uśrednienie funkcji dopełniającej:

model 1:

$$W(\varepsilon) = (1-p)W_1(\varepsilon) + pW_2(\varepsilon) \; , \tag{2.3}$$

model 2:

$$W^*(\sigma) = (1-p)W_1^*(\sigma) + pW_2^*(\sigma) \; , \tag{2.4}$$

gdzie przypominamy, że indeks dolny 1 odnosi się do matrycy, a indeks 2 do cząstek. Relacje konstytutywne w modelu 1 otrzymamy z $(2.2)_1$, a w modelu 2 z $(2.2)_2$, po uprzednim zapostulowaniu odpowiednich funkcji energii składników kompozytu $W_\alpha(\varepsilon)$ albo $W_\alpha^*(\sigma)$ ($\alpha = 1,2$).

Zauważmy, że modele 1 i 2 można uogólnić na dowolną liczbę składników kompozytu, tzn. odpowiednio: $W(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N} p_n W_n(\varepsilon)$, $W^*(\sigma) = \sum_{n=1}^{N} p_n W_n^*(\sigma)$, gdzie $p_n \in (0,1)$ oraz $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$. Jeżeli w matrycy uwzględniamy pory o udziale objętościowym p_p, to wtedy $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1 - p_p$.

W najprostszej sytuacji, związków liniowych sprężystości, funkcje $W_\alpha(\varepsilon)$ i $W_\alpha^*(\sigma)$ są funkcjami kwadratowymi:

$$W_\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{2} E_\alpha \varepsilon^2, \qquad W_\alpha^*(\sigma) = \frac{1}{2E_\alpha} \sigma^2. \tag{2.5}$$

Po podstawieniu $(2.5)_1$ do (2.3) oraz $(2.2)_1$ otrzymamy relację konstytutywną kompozytu wg liniowego modelu 1:

$$\sigma = [(1-p)E_1 + pE_2]\varepsilon \equiv E_{CG}\varepsilon \; . \tag{2.6}$$

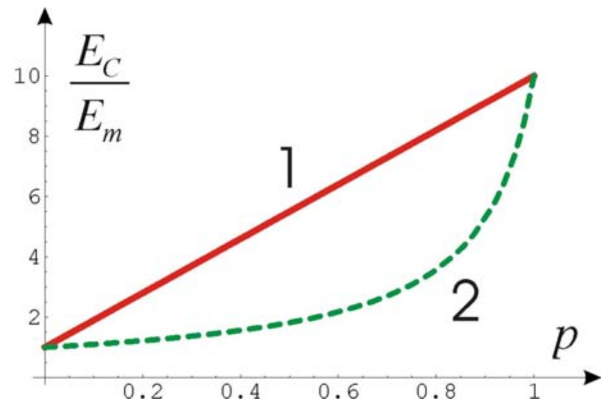
Podobnie, po podstawieniu $(2.5)_2$ do (2.4) oraz $(2.2)_2$ otrzymamy relację konstytutywną kompozytu wg liniowego modelu 2:

(2.7)
$$\varepsilon = \left[(1-p)\frac{1}{E_1} + p\frac{1}{E_2} \right]\sigma \equiv \frac{1}{E_{CD}}\sigma \ .$$

Zauważmy, że jeżeli $E_{cz} > E_m$, to uzyskujemy efekt usztywnienia (wzmocnienia) „skonstruowanych" kompozytów w stosunku do materiału matrycy oraz dodatkowo ze wzorów (2.6) i (2.7) , które zapiszemy w postaci:

(2.8)
$$E_{CD} = \frac{E_m E_{cz}}{(1-p)E_{cz} + pE_m} \ , \qquad E_{CG} = (1-p)E_m + pE_{cz} \ ,$$

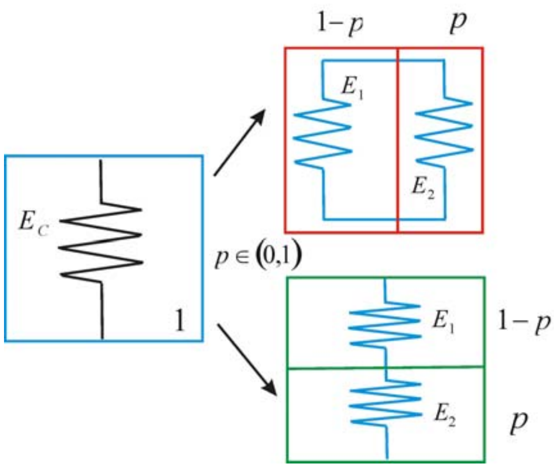
wynika, że istnieją tzw. *„górne" i „dolne" oszacowania* przewidywanej wartości *modułu sprężystości kompozytu* zbrojonego rozproszonymi cząstkami. Są to klasyczne ograniczenia znane z elementarnej mechaniki kompozytów sprężystych, patrz rys.2.1. Mają one interpretację mechaniczną, tzn. wynikają one z rozważań energetycznych: uśrednienie naprężeń (równoległe połączenie sprężyn) to uśrednienie jednostkowej energii sprężystości (patrz wzór (2.3)), a uśrednienie odkształceń (szeregowe połączenie sprężyn) to uśrednienie funkcji dopełniającej do jednostkowej energii sprężystości (2.4), por. rys.2.2.



Rys.2.1. Oszacowanie górne $(2.8)_2$ i dolne $(2.8)_1$ modułu sprężystości kompozytu (w postaci matrycy zbrojonej cząstkami) w funkcji udziału objętościowego cząstek o module sprężystości $E_{cz} = 10E_m$. Zamknięty obszar, ograniczony krzywymi 1 i 2, zawiera punkty tzw. przewidywanych wartości modułów sprężystości.

Uwaga: Pierwsze prace teoretyczne w tej dziedzinie opublikowane zostały przed drugą wojną światową i wiążą się z nazwiskami Voigta i Reussa, zaś pierwsze zastosowania dotyczyły materiałów polikrystalicznych oraz oszacowania modułów sztywności K i G (odpowiednio zmian objętościowych i ścinania), patrz np. Hearmon (1961). Obecnie istnieje w mechanice kompozytów wzmocnionych cząstkami wiele innych modeli teoretycznych, które służą do wyznaczenia efektywnych własności sprężystych. Szczegółowo są one przedyskutowane w np. w cytowanych monografiach Dąbrowskiego (1989) oraz Nemata-Nassera i Hori (1993). Uogólnienia polegają np. na uwzględnieniu kształtu cząstek lub innych charakterystycznych parametrów składników kompozytu. Celem wielu prac jest otrzymanie węższych oszacowań na efektywne własności kompozytu niż wynika to z modeli Voigta i Reussa. W tym miejscu należy zaznaczyć, że w projektowaniu kompozytów wzmocnionych cząstkami stosuje się także wzory empiryczne, które nie są tu dyskutowane. Oczywiście ich przydatność musi być zweryfikowana na wystarczająco dużej populacji próbek (z punktu widzenia wiarygodności statystycznej) i w różnych laboratoriach.

Należy zaznaczyć, że wzory (2.8) obowiązują dla $p \in [0,1]$ i są symetryczne względem występujących tam argumentów, gdyż $p_1 = 1-p$, $p_2 = p$, co oznacza ich formalną poprawność. Jeżeli $p_2 = 0$, to z (2.8) otrzymamy E_1 i odwrotnie, por. rys.2.1. Z reguły ogranicza się zastosowanie modeli 1 albo 2 do sytuacji gdy $p << 1$. Oczywiście wyprowadzone wzory nie obowiązują w sytuacji gdy wprowadzenie cząstek do matrycy (i technologia produkcji kompozytu) prowadzi do „ujawnienia się” własności synergicznych. Nieodpowiednie cząstki w matrycy mogą wywołać także skutki negatywne np. w sytuacji kiedy między składnikami kompozytu dochodzi do niepożądanych reakcji chemicznych.



Rys.2.2. Schemat „kompozytowej sprężyny” w dwóch przypadkach, tzn. połączenia równoległego i szeregowego dwóch faz kompozytu. Moduł sprężystości kompozytu wg wzorów: (2.6) (połączenie szeregowe) i (2.7) (połączenie równoległe).

Idea konstrukcji związków fizycznych wg modeli 1 i 2 nie jest oczywiście ograniczona do związków liniowych, por.rys.2.3. Na przykład z (2.3) oraz $(2.2)_1$, otrzymujemy następującą relację konstytutywną kompozytu wg modelu 1:

(2.9) $$\sigma = (1-p)\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} + p\frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} \equiv E_{Si}(\varepsilon)\varepsilon \ ,$$

gdzie

(2.10) $$E_{Si}(\varepsilon) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = (1-p)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} + p\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} \ ,$$

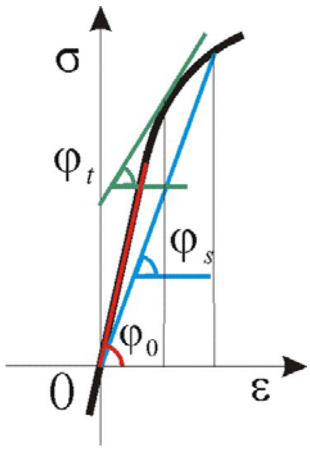
jest efektywnym modułem siecznym kompozytu. Moduł styczny obliczony jest ze związku:

(2.11) $$E_{St}(\varepsilon) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = (1-p)\frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon^2} + p\frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2} \ .$$

Podstawowym ograniczeniem (o charakterze termodynamicznym) jest wypukłość funkcji W, czyli dodatniość modułu stycznego (2.11). Zauważmy, że jeżeli funkcja energii jest wystarczająco regularna (oraz dla bardzo małych odkształceń można ją aproksymować funkcją kwadratową, czyli tak jak w przypadku $(2.5)_1$) to zachodzi związek:

(2.12) $$E_{Si}(0) = E_{St}(0) = E_{CG} \ .$$

Interpretacje graficzne siecznych i stycznych modułów sztywności zamieszczono na rys.2.3.



Rys.2.3. Schematyczny wykres nieliniowego związku sprężystości $\sigma(\varepsilon)$, z interpretacją stycznych i siecznych modułów sztywności, tzn. $\mathrm{tg}\varphi_t = E_{St}$, $\mathrm{tg}\varphi_s = E_{Si}$. Moduł początkowy (nazywany często modułem Younga), to $\mathrm{tg}\varphi_0 = E$.

Rzeczywiste **materiały wykazują własności sprężyste w ograniczonym zakresie odkształceń i naprężeń**. Wobec tego konieczne jest wprowadzenie ograniczeń. W modelu 1 należy założyć zakres dopuszczalnych odkształceń, tzn.:

(2.13) $$\varepsilon \in \left(-\varepsilon_{ds}, \varepsilon_{dr}\right),$$

gdzie dodatnie parametry ε_{ds} i ε_{dr} wyznacza się doświadczalnie z testów ściskania i rozciągania. Z relacji konstytutywnych modelu 1 wynikają wtedy ograniczenia na dopuszczalne wartości naprężeń. Natomiast w modelu 2 zakładamy zakres dopuszczalnych naprężeń, tzn.:

(2.14) $$\sigma \in \left(-\sigma_{ds}, \sigma_{dr}\right),$$

gdzie dodatnie parametry σ_{ds} i σ_{dr} należy wyznaczyć doświadczalnie z testów ściskania i rozciągania. Z relacji konstytutywnych modelu 2 wynikają wtedy ograniczenia na dopuszczalne wartości odkształceń.

Uwagi: Analogie mechaniczne stosowane w liniowej teorii lepkosprężystości (por. pkt.S.3.3) mogą być także punktem wyjścia do budowy relacji konstytutywnych kompozytów lepkosprężystych. Wobec tego w najprostszych modelach osnowa ma własności lepkosprężyste (o znanej relacji konstytutywnej), a cząstki zbrojenia mają własności sprężyste. Wtedy mamy dwie drogi postępowania, które wynikają z równoległego albo szeregowego połączenia składników kompozytu o znanych udziałach objętościowych. W literaturze istnieje wiele różnych teoretycznych relacji konstytutywnych kompozytów (zarówno wzmacnianych cząstkami jak i włóknami), które otrzymano w zasygnalizowany powyżej sposób. Dotyczy to także modeli materiałów, w których uwzględnia się własności nieliniowe, takie jak np. plastyczność albo kontynualne zarysowanie materiału. Liczba publikacji na ten temat rośnie nieomal w postępie geometrycznym, ze względu na powszechne stosowanie kompozytów. Nawet pobieżne studium literaturowe (w kontekście materiałów kompozytowych stosowanych w nawierzchniach) powinno być przedmiotem oddzielnego opracowania.

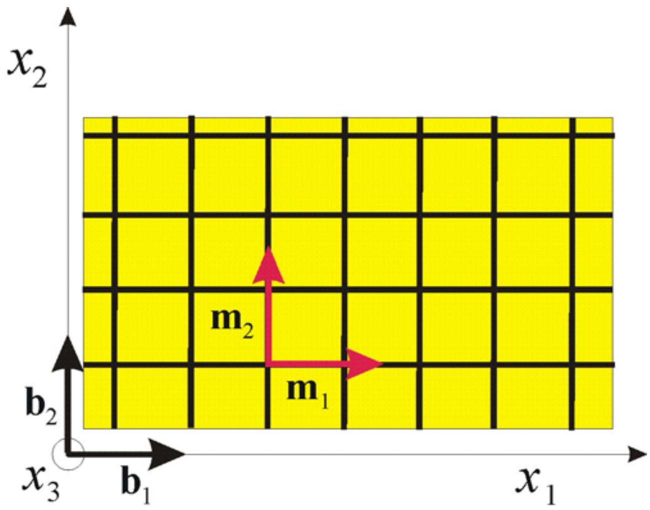
2. Liniowo-sprężysty ortotropowy model przestrzenny - izotropowa matryca zbrojona dwiema rodzinami włókien

2.1. Podstawowe założenia i relacje konstytutywne

Modelowany kompozyt składa się z izotropowej matrycy i dwóch rodzin włókien (patrz rys.1.1), które tworzą regularną siatkę zbrojenia.

Niech $p_1 \in (0,1)$ i $p_2 \in (0,1)$ (przy założeniu, że: $p_1 + p_2 << 1$) oznaczają udziały objętościowe odpowiednio pierwszej i drugiej rodziny włókien w reprezentatywnej objętości kompozytu. Zakładamy pełną przyczepność między rodzinami włókien a matrycą. Niech włókna danej rodziny α ($\alpha = 1$ albo $\alpha = 2$) „pracują" jednowymiarowo, tzn. tylko wzdłuż wektora $\mathbf{m}_\alpha$, który jest wersorem zgodnym z kierunkiem ułożenia danej rodziny włókien w matrycy, por. pkt.S.1.5. Oznacza to, że jednostkowa energia sprężystości (JES) nagromadzona we włóknach kompozytu rodziny α w funkcji tensora odkształceń kompozytu jest następująca:

(1.1) $$W_{Z\alpha} = \frac{1}{2} E_{Z\alpha} (\mathbf{m}_\alpha . \boldsymbol{\varepsilon} . \mathbf{m}_\alpha)^2 = \frac{1}{2} E_{Z\alpha} (\mathrm{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_\alpha)^2 .$$



Rys.1.1. Schemat rozpatrywanego kompozytu – izotropowa matryca i dwie rodziny włókien zbrojenia. Na rysunku zamieszczono szczególny przypadek, w którym rodziny włókien tworzą siatkę ortogonalną.

Funkcja JES wyrażana jest w jednostkach energii na jednostkę objętości, tzn. J/m^3=N/m^2=Pa, czyli w jednostkach ciśnienia albo naprężenia. We wzorze (1.1) $E_{Z\alpha}$ oznacza uśredniony moduł Younga α- rodziny włókien, zaś tensor $\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{m}_\alpha \otimes \mathbf{m}_\alpha$ (nie ma sumowania po α) może być interpretowany jako tensor struktury, ($\mathrm{tr}\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{m}_\alpha \cdot \mathbf{m}_\alpha = 1$, $\mathbf{M}_\alpha^2 = \mathbf{M}_\alpha$, czyli $\|\mathbf{M}_\alpha\| = 1$, por. np. Boehler (1987) i obszerną literaturę źródłową o teorii niezmienników i funkcji tensorowych oraz ich aplikacjach w mechanice ośrodków ciągłych). Wobec tego JES kompozytu ma następującą postać (idea wg modelu 1 z pkt.1.1.2):

(1.2) $$W = (1 - p_1 - p_2) W_M + p_1 W_{Z1} + p_2 W_{Z2} ,$$

gdzie W_M jest jednostkową energią sprężystości w izotropowej matrycy i wyraża się następującym wzorem:

(1.3) $$W_M = \frac{E_M}{2(\nu_M + 1)} \left[\frac{\nu_M}{(1 - 2\nu_M)} (\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2 \right] = \frac{1}{2} \lambda_M (\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_M \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} K_M (\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + G_M \mathrm{tr}\mathbf{e}^2 .$$

We wzorze $(1.3)_1$ E_M i ν_M oznaczają odpowiednio moduł Younga i stałą Poissona materiału matrycy, natomiast λ_M i $\mu_M = G_M$ są stałymi Lamégo, a K_M jest modułem ściśliwości (sztywności objętościowej matrycy), por. pkt.S.1.3. Przypominamy, że tensor $\mathbf{e}$ jest dewiatorem tensora odkształcenia ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + \mathbf{e}$). Wzory $(1.3)_2$ i $(1.3)_3$ definiujące JES matrycy są równoważne ze wzorem $(1.3)_1$. Wzór $(1.3)_3$ ma jednak dodatkową interpretację, gdyż jednostkowa energia W_M jest sumą jednostkowej energii sprężystości odkształcenia objętościowego i postaciowego matrycy. Przypominamy, że stałe sprężystości $K_{1M} = 3K_M$ i $K_{2M} = 2G_M$ mają interpretację modułów Kelvina, odpowiednio jednokrotnej i pięciokrotnej wartości własnej tensora sztywności matrycy. Należy podkreślić, że we wzorze na energię sprężystości kompozytu (1.2) występują sprzężenia między stanem dewiatorowym i kulistym tensora odkształcenia, co jest charakterystyczną cechą materiałów anizotropowych, patrz np. Jemioło (2003) i obszerną literaturę źródłową tam cytowaną.

Relację konstytutywną rozpatrywanego kompozytu otrzymamy różniczkując (1.2) względem tensora odkształceń, po uprzednim podstawieniu (1.1) i np. $(1.3)_1$. Otrzymamy wtedy:

(1.4)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1+\nu_M}\left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu_M}{(1-2\nu_M)}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}\right] + p_1 E_{Z1}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1 + p_2 E_{Z2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2)\mathbf{M}_2 \\ &= p_M\boldsymbol{\sigma}_M + p_1\boldsymbol{\sigma}_{Z1} + p_2\boldsymbol{\sigma}_{Z2},\end{aligned}$$

gdzie $p_M = 1 - p_1 - p_2$ jest udziałem objętościowym matrycy (**uwaga:** jeżeli uwzględniamy porowatość, to $p_M = 1 - p_1 - p_2 - p_p$ i odpowiednio modyfikujemy podane w tym punkcie wzory). Związkowi $(1.4)_2$ można nadać następującą interpretację: $\boldsymbol{\sigma}$ jest uśrednionym tensorem naprężenia w kompozycie, natomiast $\boldsymbol{\sigma}_M$ jest tensorem naprężenia w materiale matrycy, a tensory $\boldsymbol{\sigma}_{Z\alpha} = E_{Z\alpha}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_\alpha)\mathbf{M}_\alpha$ są naprężeniami w rodzinie zbrojenia α. Zauważmy, że relacja konstytutywna (1.4) jest szczególnym przypadkiem ortotropowego związku Hooke'a (także w sytuacji gdy rodziny włókien nie są ortogonalne, czyli $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \neq 0$).

Ponieważ działania: śladu tensora, nasunięcia tensorów oraz iloczynu tensorowego są operacjami liniowymi, to relację konstytutywną (1.4) można napisać w równoważnej postaci, wprowadzając tensor czwartego rzędu $\mathbf{C}$, nazywany *tensorem sztywności* materiału:

(1.5)
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}.\boldsymbol{\varepsilon},$$

gdzie

(1.6)
$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1+\nu_M}\left(\mathbf{1} + \frac{\nu_M}{1-2\nu_M}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right) + p_1 E_{Z1}\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1 + p_2 E_{Z2}\mathbf{M}_2\otimes\mathbf{M}_2 \\ &= (1-p_1-p_2)\mathbf{C}_M + p_1 E_{Z1}\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1 + p_2 E_{Z2}\mathbf{M}_2\otimes\mathbf{M}_2.\end{aligned}$$

Oczywiście (1.4) i tensor (1.6) możemy zapisać w równoważnych postaciach stosując dowolne pary niezależnych stałych sprężystości materiału matrycy, por. (1.3). Tensor $\mathbf{C}_M$ jest tensorem izotropowym czwartego rzędu. Anizotropia tensora $\mathbf{C}$ wynika z występowania w (1.6) iloczynów tensorowych $\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2\otimes\mathbf{M}_2$.

Jeżeli $\mathbf{m}_\alpha(\mathbf{x})$ (wektor $\mathbf{x}$ określa położenie danego punktu w ciele), to relacje konstytutywne (1.4) opisują materiał niejednorodny. Niejednorodność wynika tylko z różnego ułożenia rodzin włókien w reprezentatywnych objętościach kompozytu. W ogólności materiał nazywamy niejednorodnym jeżeli $\mathsf{C} = \mathsf{C}(\mathbf{x})$. Wtedy także udziały objętościowe, moduły sprężystości matrycy i rodzin włókien mogą być zależne od $\mathbf{x}$.

2.2. Wyprowadzenie związku odwrotnego

Relacja konstytutywna (1.5) jest związkiem liniowym (o dodatnio określonym tensorze sztywności, co wynika bezpośrednio z interpretacji stałych sprężystości występujących w (1.4)), czyli istnieje do niej jednoznaczna relacja odwrotna. W celu znalezienia tej relacji, czyli związku między tensorem odkształcenia i tensorem naprężenia, należy znaleźć odwrotność tensora sztywności (1.6), gdyż

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathsf{C}^{-1}.\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathsf{S}.\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.1}$$

gdzie S jest *tensorem podatności*.

Podwójnie symetryczne tensory czwartego rzędu C i S, nazywane są tensorami Hooke'a, patrz np. Rychlewski (2000,2001). Tensory te należą do przestrzeni $\mathsf{H} \equiv \mathrm{Sym}(\mathsf{T}_{2s} \otimes \mathsf{T}_{2s})$, $\dim \mathsf{H} = 21$. Przypominamy, że $\mathsf{C} : \mathsf{S} = \mathsf{S} : \mathsf{C} = \mathbf{1}$, gdzie $\mathbf{1}$ jest tensorem jednostkowym czwartego rzędu (operacją identycznościową dla tensorów Hooke'a), symbol „:" oznacza nasunięcie po dwóch sąsiednich wskaźnikach.

Tensory sztywności i podatności zapisujemy w ortonormalnej bazie tensorowej albo wg standardowej notacji Voigta, otrzymując ich odpowiednie reprezentacje macierzowe, por. pkt.S.1.4. Jest to wygodne ze względów numerycznych, gdyż wtedy znalezienie związku odwrotnego sprowadza się do odwrócenia macierzy reprezentacji tensora sztywności. Postępowanie to jest identyczne jak w przypadku dowolnego materiału anizotropowego.

Jeżeli rodziny włókien są ortogonalne to, z punktu widzenia przekształceń algebraicznych, łatwiej jest znaleźć relację odwrotną bezpośrednio wykorzystując związek (1.4).

Zapisujemy (1.4) w wygodnej do przekształceń postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} = a\boldsymbol{\varepsilon} + b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + c(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1 + d\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2)\mathbf{M}_2, \tag{2.2}$$

gdzie wzory na stałe a, b, c i d wynikają z porównania (2.1) z (1.4):

$$a = \frac{E_M(1 - p_1 - p_2)}{1 + \nu_M}, \quad b = \frac{E_M \nu_M (1 - p_1 - p_2)}{(1 + \nu_M)(1 - 2\nu_M)}, \quad c = p_1 E_{Z1}, \quad d = p_2 E_{Z2}. \tag{2.3}$$

W przypadku szczególnym gdy rodziny włókien są prostopadłe to: $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = 0$ i znalezienie relacji odwrotnej do (2.2) jest stosunkowo proste, gdyż tensory struktury są ortogonalne $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = \mathrm{tr}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = 0$. W tym celu obliczamy następujące ślady tensora naprężenia i ślady nasunięcia tensora naprężenia z tensorami struktury:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} &= (a + 3b)\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} + c(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1) + d\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2),\\
\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1 &= b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}) + (a + c)(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1),\\
\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2 &= b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}) + (a + d)(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} &= a_{11}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} + a_{12}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1) + a_{13}\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2),\\
\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 &= a_{21}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} + a_{22}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1) + a_{23}\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2),\\
\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 &= a_{31}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} + a_{32}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1) + a_{33}\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie

$$[a_{ij}] = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} (a+c)(a+d) & -c(a+d) & -d(a+c) \\ -b(a+d) & a(a+3b+d)+2bd & bd \\ -b(a+c) & bc & a(a+3b+c)+2bc \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

oraz

$$A = a^3 + a^2(3b+c+d) + a(2bc+2bd+cd) + bcd \ . \tag{2.7}$$

Z kolei z (2.1) wynika, że

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{a}\left[\boldsymbol{\sigma} - b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} - c(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1 - d\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2)\mathbf{M}_2\right], \tag{2.8}$$

czyli w (2.8) należy podstawić (2.5) (oraz wprowadzone oznaczenia (2.3), (2.6) i (2.7)).

W związku odwrotnym do (1.6) ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathsf{S}.\boldsymbol{\sigma}$) występuje tensor podatności: $\mathsf{S} = \mathsf{C}^{-1}$. Przypominamy, że znajomość tensora podatności albo związku (2.8) jest konieczna do interpretacji zależności między składowymi tensora podatności i tzw. „stałymi technicznymi sprężystości". Pamiętając, że wektory $\overline{\mathbf{m}}$ i $\overline{\mathbf{n}}$ są wersorami, wzory te można przedstawić w następującej postaci (por. np. Hayes (1972), Jemioło (2003)):

a) moduł Younga w dowolnym kierunku $\overline{\mathbf{n}}$,

$$\frac{1}{E(\overline{\mathbf{n}})} = (\overline{\mathbf{n}} \otimes \overline{\mathbf{n}}).\mathsf{S}.(\overline{\mathbf{n}} \otimes \overline{\mathbf{n}}), \tag{2.9}$$

b) współczynniki Poissona,

$$-\frac{\nu(\overline{\mathbf{n}},\overline{\mathbf{m}})}{E(\overline{\mathbf{n}})} = -\frac{\nu(\overline{\mathbf{m}},\overline{\mathbf{n}})}{E(\overline{\mathbf{m}})} = (\overline{\mathbf{m}} \otimes \overline{\mathbf{m}}).\mathsf{S}.(\overline{\mathbf{n}} \otimes \overline{\mathbf{n}}), \quad \overline{\mathbf{m}} \cdot \overline{\mathbf{n}} = 0\,, \tag{2.10}$$

c) moduły ścinania,

$$\frac{1}{G(\overline{\mathbf{m}},\overline{\mathbf{n}})} = \frac{1}{G(\overline{\mathbf{n}},\overline{\mathbf{m}})} = 4(\overline{\mathbf{m}} \otimes \overline{\mathbf{n}}).\mathsf{S}.(\overline{\mathbf{m}} \otimes \overline{\mathbf{n}}), \quad \overline{\mathbf{m}} \cdot \overline{\mathbf{n}} = 0\,. \tag{2.11}$$

Wzory (2.9)-(2.11) obowiązują dla dowolnych materiałów anizotropowych. Techniczne stałe sprężystości (w wybranych kierunkach i płaszczyznach) stosuje się w przypadku materiałów orotropowych i materiałów o wyższej symetrii, gdyż wtedy jednoznacznie definiują one reprezentację tensora podatności. Ze wzorów tych wynika postać macierzy podatności (S.1.4.5). Szczegółowe wzory i ich interpretacje podaliśmy w pkt.S.1.4. Szczególną uwagę należy zwrócić na pkt.S.1.5 oraz zamieszczone tam wykresy modułów Younga, współczynników Poissona oraz modułów ścinania, które ilustrują testy PSN przy różnej orientacji próbki względem głównych osi anizotropii materiału.

2.3. Podstawowe uwagi i wnioski

i) Rozpatrywany liniowo-sprężysty model kompozytu jest materiałem anizotropowym o symetrii ortotropii – co jest ważne w aplikacjach i stosowaniu np. programów MES, gdyż w danych do reprezentacji macierzowej ortotropowego związku Hooke'a (S.1.4.1) należy podać 9 niezależnych parametrów. W relacji konstytutywnej (1.4) występują tylko cztery niezależne parametry: a, b, c i d (oprócz oczywiście tensorów struktury), patrz (2.3), które zależne są od sześciu parametrów definiujących sprężyste własności kompozytu. Są to: udziały objętościowe p_1 i p_1, moduły sprężystości matrycy np. E_M i ν_M oraz moduły Younga dwóch rodzin włókien: E_{Z1} i E_{Z2}. W tym znaczeniu model kompozytu jest uproszczeniem ortotropowego związku Hooke'a. Należy zaznaczyć, że techniczne stałe sprężystości materiałów ortotropowych wyznacza się w klasycznych eksperymentach. Niezależnych stałych jest dziewięć (konieczne jest wykonanie dwunastu testów, wśród których trzy testy służą do weryfikacji dokładności uzyskanych wyników, patrz zależność (2.10) oraz wzory pkt.S.1.4). Makroskopowe eksperymenty na reprezentatywnych próbkach kompozytu i wyznaczone z nich techniczne stałe ortotropii powinny służyć do weryfikacji parametrów sprężystości wynikających z teoretycznego modelu kompozytu.

ii) W sytuacji gdy wersory $\mathbf{m}_\alpha$ są zgodne z przyjętą ortonormalną bazą układu kartezjańskiego oraz siatka zbrojenia jest ortogonalna, np.: $\mathbf{m}_1 = \mathbf{b}_1$ i $\mathbf{m}_2 = \mathbf{b}_2$, to z (1.4) wynika, że

(3.1)

$$\sigma_{11} = (a+b+c)\varepsilon_{11} + b(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) = \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{11} + \nu_M(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right] + p_1 E_{Z1}\varepsilon_{11},$$

$$\sigma_{22} = (a+b+d)\varepsilon_{22} + b(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}) = \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{22} + \nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})\right] + p_2 E_{Z2}\varepsilon_{22},$$

$$\sigma_{33} = (a+b)\varepsilon_{33} + b(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) = \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{33} + \nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right],$$

$$\sigma_{12} = a\varepsilon_{12} = \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1+\nu_M}\varepsilon_{12}, \quad \text{itp.} \quad \sigma_{13} = a\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = a\varepsilon_{23},$$

gdzie podstawiliśmy (2.3). Przypominamy, że

$$\sigma_x = \sigma_{11}, \quad \tau_{xy} = \sigma_{12}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{11}, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}, \quad \text{itp.}$$

Wobec tego macierz reprezentacji tensora sztywności w notacji Voigta jest następująca (por. pkt.S.1.4):

(3.2)
$$[C_{kl}] = \begin{bmatrix} a+b+c & b & b & 0 & 0 & 0 \\ & a+b+d & b & 0 & 0 & 0 \\ & & a+b & 0 & 0 & 0 \\ & & & a/2 & 0 & 0 \\ & & & & a/2 & 0 \\ sym. & & & & & a/2 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście gdy $c = d = 0$, to mamy z (3.1) i (3.2) zależności obowiązujące dla materiału izotropowego (przypominamy, że jeżeli $p_1 = p_2 = 0$, to z (1.4) otrzymujemy związek Hooke'a dla matrycy).

Macierz podatności ma następującą postać:

(3.3)
$$[S_{pq}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2/a & 0 & 0 \\ & & & & 2/a & 0 \\ sym. & & & & & 2/a \end{bmatrix},$$

gdzie

$$S_{11}=\frac{1}{A}\left[a(a+2b)+(a+b)d\right], \qquad S_{22}=\frac{1}{A}\left[a(a+2b)+(a+b)c\right],$$

(3.4)
$$S_{33}=\frac{1}{A}\left[(a+b+c)(a+b+d)-b^2\right],$$

$$S_{12}=-\frac{ab}{A}, \quad S_{13}=-\frac{b(a+d)}{A}, \quad S_{23}=-\frac{b(a+c)}{A},$$

gdzie z kolei zastosowano oznaczenie (2.7).

Widzimy teraz wyraźnie, że struktura macierzy sztywności i podatności jest podobna jak w ortotropowym związku Hooke'a (z 9 niezależnymi stałymi sprężystości), patrz (S.1.4.1)-(S.1.4.11). Ze względu na wprowadzone idealizacje w modelu kompozytu, między elementami macierzy sztywności i podatności materiału istnieją dodatkowe zależności, tzn.:

(3.5)
$$C_{12}=C_{13}=C_{23}, \qquad C_{44}=C_{55}=C_{66}$$

oraz

(3.6)
$$S_{44}=S_{55}=S_{66}.$$

Z porównania elementów macierzy (3.3) z elementami macierzy (S.1.4.5) otrzymujemy interpretacje technicznych stałych sprężystości materiału kompozytowego w tzw. osiach głównych ortotropii, tzn.:

(3.7)
$$S_{11}=1/E_1, \quad S_{22}=1/E_2, \quad S_{33}=1/E_3,$$
$$S_{12}=-\nu_{21}/E_2=-\nu_{12}/E_1=S_{21}, \qquad S_{13}=-\nu_{31}/E_3=-\nu_{13}/E_1=S_{31},$$
$$S_{23}=-\nu_{32}/E_3=-\nu_{23}/E_2=S_{32}$$

oraz z (3.6) wynika, że $G_{23}=G_{31}=G_{12}=p_M G_M$, gdzie $p_M=1-p_1-p_2$.

Szczegółową dyskusję modułów Younga, współczynników Poissona i modułów ścinania, wg wzorów (2.9)-(2.11) w przypadku PSN, przedstawiliśmy w Załączniku 1 do Sprawozdania WS-02 z 2005 roku. Ponieważ jakościowe wnioski są identyczne jak w wymienionym Załączniku, nie zamieszczamy tu dyskusji dotyczącej modelu przestrzennego i zmienności tzw. technicznych stałych sprężystości w zależności od orientacji próbki względem siatki zbrojenia.

iii) Związki fizyczne typu (3.1) (tzn. wg idei modelu 1, patrz pkt.1) są często przytaczane w literaturze dotyczącej kompozytów włóknistych (por. np. Jemioło i in. (1990), Marks (2000)) i trudno powiedzieć, kto po raz pierwszy je sformułował. Oryginalność pkt.2.2 i 2.3 opracowania polega na sposobie wyprowadzenia tych równań, które wynikają z zależności ogólnych o energii sprężystości składników kompozytu, zastosowaniu teorii niezmienników i funkcji tensorowych, interpretacji relacji odwrotnych, itp. Podstawy teorii materiałów zbrojonych włóknami (w ramach mechaniki ośrodków ciągłych) przedstawione są w książce Spencera (1972), por. także monografię pod redakcją Boehlera (1987) i literaturę tam cytowaną.

iv) W zaproponowanym modelu kompozytu posługujemy się pojęciem modułu sztywności rodziny włókien w siatce, a nie modułu sztywności włókna. Gdyż $E_z \neq E_w$, co wynika z technologii wykonania siatek, z reguły $E_z < E_w$. Wobec tego tensor sztywności kompozytu można zaproponować następująco:

(3.8)
$$\mathbf{C_R}=(1-p_1-p_2)\mathbf{C}_M+p_1\beta_1 E_w \mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1+p_2\beta_2 E_w \mathbf{M}_2\otimes\mathbf{M}_2 .$$

Bezwymiarowe parametry β_1 i β_2 (należące do przedziału od 0 do 1) należy ustalić doświadczalnie. Wobec tego w relacjach konstytutywnych (2.2) albo (2.8), obowiązujących w przypadku ortogonalnej siatki mamy następujące parametry:

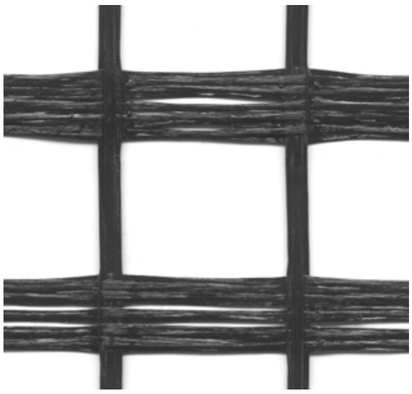
$$a=\frac{E_M p_M}{1+\nu_M},\quad b=\frac{E_M \nu_M p_M}{(1+\nu_M)(1-2\nu_M)},\quad c=p_1\beta_1 E_w,\quad d=p_2\beta_2 E_w. \tag{3.9}$$

Interpretacja technicznych stałych sprężystości wynika z (3.9) oraz (3.4) i (3.7).

Stosowane powyżej nazewnictwo wywodzi się z mechaniki kompozytów. W przypadku siatek (jak na rys.3.1) i przedstawionego modelu należałoby posługiwać się np. pojęciem sztywności nici i sztywności rodziny nici, lub innymi adekwatnymi pojęciami dla danego wyrobu. Oczywiście nie zmienia to samego modelu materiału kompozytowego, ale wprowadza inne interpretacje składników kompozytu. Nić wykonuje się z włókien, czyli moduł Younga włókien jest większy niż moduł Younga nici (traktowanej makroskopowo jako materiał jednorodny), co zmienia interpretacje wielkości występujących we wzorze (3.9).

Armatex RS

GLAS BITUTEX



Rys.3.1. Zdjęcia przykładowych siatek stosowanych w funkcji zbrojenia.

v) W zagadnieniach izotermicznych można uwzględnić wpływ temperatury T wprowadzając zależność stałych sprężystości matrycy i modułu sztywności włókna od T, tzn.: $E_M(T)$, $\nu_M(T)$ i $E_w(T)$. Funkcje te podstawiamy np. w tensorze sztywności (3.8) albo w relacji konstytutywnej kompozytu o parametrach (3.9).

vi) W podobny sposób jak pokazaliśmy to w pkt.2.1 można wyprowadzić model kompozytu, w którym uzgodnione są naprężenia w rodzinach włókien i w matrycy (por. pkt.1, model 2). Punktem wyjścia jest wtedy funkcja dopełniająca do JES (nazywana nieprecyzyjnie energią komplementarną). W konsekwencji otrzymamy następujący tensor podatności w modelu o $E_z < E_w$:

$$\mathbf{S}_{\overline{\mathbf{R}}}=p_M\mathbf{S}_M+\frac{p_1\gamma_1}{E_w}\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1+\frac{p_2\gamma_2}{E_w}\mathbf{M}_2\otimes\mathbf{M}_2. \tag{3.10}$$

Bezwymiarowe parametry γ_1 i γ_2 należy ustalić doświadczalnie. Z (2.1) i (3.10) wynika, że

$$\varepsilon = -\frac{\nu_M}{E_M}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \frac{(1+\nu)_M}{E_M}\boldsymbol{\sigma} + \frac{p_1\gamma_1}{E_w}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1 + \frac{p_2\gamma_2}{E_w}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2)\mathbf{M}_2 \ . \tag{3.11}$$

Model ten ma znaczenie teoretyczne (zwłaszcza wtedy gdy chcemy oszacować własności efektywne kompozytu). W kontekście tego opracowania, gdzie siatkę rozpatruje się w funkcji zbrojenia, celem wprowadzenia siatki do matrycy jest przejmowanie naprężeń, a nie odkształceń, co uzasadnia wybór modelu wg pkt.2.2 do dalszych rozważań.

vii) Zaproponowanego w pkt.2.1 modelu kompozytowej warstwy nie można uwzględnić w klasycznej metodzie mechanistycznej projektowania nawierzchni drogowych, gdyż warstwa z siatką ma makroskopowe własności ortotropowe. Dlatego w pkt.4 zamieszczamy aproksymację tego modelu modelem izotropowym.

viii) Należy w tym miejscu zaznaczyć także, że w literaturze dotyczącej nawierzchni asfaltowych (patrz np. Piłat i Radziszewski (2004) i.in.) stosuje się pojęcie modułu sztywności w innym znaczeniu niż w mechanice materiałów i konstrukcji od ponad dwustu lat. Także liniowa teoria lepkosprężystości jest dziedziną mechaniki rozwijaną od ponad stu lat i ma precyzyjnie określone słownictwo. Autor opracowania był świadkiem wielu nieporozumień z tego wynikających, zwłaszcza w sytuacjach dotyczących zagadnień termodynamiki oraz pojęcia energii, pracy i dyssypacji. Stosowana krótka nazwa modułu sztywności (jako długości zespolonego modułu Younga wyznaczanego w testach z obciążeniem harmonicznym), modułu sprężystości jako siecznego modułu Younga, nie budzi wątpliwości tylko wtedy gdy ograniczamy rozważania do jednowymiarowych modeli liniowych lepkosprężystości i sprężystości oraz interpretacji standardowych badań doświadczalnych. Jeżeli wykracza się poza standardowe procedury działania i proste modele, stosowane słownictwo powinno być precyzyjne, zwłaszcza wtedy gdy wyniki badań doświadczalnych wykazują nieliniowe własności mechaniczne materiałów, a celem jest aproksymacja tych wyników modelami liniowymi.

3. Nieliniowo-sprężysty ortotropowy model przestrzenny - izotropowa matryca zbrojona dwiema rodzinami włókien nie przenoszących ściskania

W punkcie tym zamieszczamy uogólnienia liniowo-sprężystego modelu kompozytu włóknistego. Celem jest uwzględnienie dodatkowych, obserwowanych doświadczalnie faktów. Po pierwsze sformułujemy model, w którym siatka zbrojenia nie przenosi ściskania, a następnie uwzględnimy kruche pękanie włókien siatki.

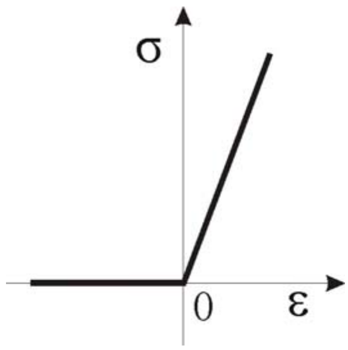
3.1. Podstawowe założenia i relacje konstytutywne

Podobnie jak w pkt.2.1 zakładamy, że kompozyt składa się z matrycy i dwóch rodzin włókien. Obecnie zakładamy wyidealizowany model, w którym nie dopuszczamy skrócenia rodziny włókien w trakcie deformacji kompozytu (por. jednowymiarową idealizację zamieszczoną na rys.1.1), co prowadzi w konsekwencji do nieliniowych związków sprężystości. Zamiast związku fizycznego o postaci (2.1.4) (albo równoważnej (2.2.2)) postulujemy następujące relacje konstytutywne:

$$\text{(1.1)} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} a\boldsymbol{\varepsilon} + b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + c(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1 + d\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2)\mathbf{M}_2\,, & \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 > 0 \; i \; \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 > 0\,, \\ a\boldsymbol{\varepsilon} + b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + c(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1\,, \qquad \text{jeżeli} & \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 > 0 \; i \; \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 \le 0\,, \\ a\boldsymbol{\varepsilon} + b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + d\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2)\mathbf{M}_2\,, & \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 \le 0 \; i \; \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 > 0\,, \\ a\boldsymbol{\varepsilon} + b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}\,, & \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 \le 0 \; i \; \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 \le 0\,. \end{cases}$$

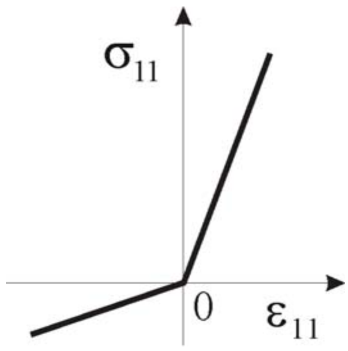
Oznaczenia w (1.1) są identyczne jak w pkt.2. W relacjach konstytutywnych (1.1) można uwzględnić propozycję (iv), co powoduje modyfikacje stałych c i d, por. $(2.2.3)_{3,4}$ z (2.3.3).

Relacje konstytutywne (1.1) są nieliniowe i stwarzają duże trudności w implementacji numerycznej. W sześciowymiarowej przestrzeni tensorów odkształcenia wprowadzone w (1.1) nierówności ograniczają dziedzinę i postać obowiązującego związku fizycznego. Ponieważ (1.1) są związkami sprężystości, tzn. spełniają założenie o stanie naturalnym (zerowym odkształceniom odpowiadają zerowe naprężenia oraz zerowa jest jednostkowa energia sprężystości), to nierówności silne występujące w (1.1) możemy zamienić na nierówności słabe i odwrotnie.



Rys.1.1. Jednowymiarowy model związku fizycznego $\sigma(\varepsilon)$ dla materiału nie przenoszącego ściskania. Funkcja $\sigma(\varepsilon)$ nie jest różniczkowalna w punkcie 0 oraz nie istnieje związek odwrotny o postaci $\varepsilon(\sigma)$ dla $\sigma < 0$. Relacje konstytutywne są następujące:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon\,, & \varepsilon > 0, \\ 0, & \varepsilon \le 0. \end{cases}$$



Rys.1.2. Typowy wykres związku między naprężeniami i odkształceniami w teście jednoosiowego ściskania/ rozciągania kompozytu o relacjach konstytutywnych (1.1). Szczegółowy opis i interpretacja w pkt.3.3.

Należy zaznaczyć, że relacje (1.1) nigdy nie przewidują sytuacji jak w modelu jednowymiarowym pokazanym na rys.1.1, gdyż matryca pracuje na ściskanie, por. rys.1.2. Jest to pożądana cecha gdyż możliwe jest zaprogramowanie tego modelu np. w programie ABAQUS, bez konieczności istotnych korekt algorytmu MES. Konieczne jest w tym celu zaprogramowanie w języku FORTRAN tzw. procedury użytkownika UMAT.

Jeżeli wersory $\mathbf{m}_\alpha$ są zgodne z przyjętą ortonormalną bazą układu kartezjańskiego oraz siatka zbrojenia jest ortogonalna, np.: $\mathbf{m}_1 = \mathbf{b}_1$ i $\mathbf{m}_2 = \mathbf{b}_2$, to z (1.1) wynikają następujące relacje konstytutywne:

a) jeżeli

(1.2) $$\varepsilon_{11} > 0 \quad \text{i} \quad \varepsilon_{22} > 0 \ ,$$

to obowiązują związki (2.3.1),

b) jeżeli

(1.3) $$\varepsilon_{11} > 0 \quad \text{i} \quad \varepsilon_{22} \le 0 \ ,$$

to

(1.4) $$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{11}+\nu_M(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right]+p_1E_{Z1}\varepsilon_{11} \ , \\ \sigma_{22} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{22}+\nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})\right] \ , \\ \sigma_{33} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{33}+\nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right] \end{aligned}$$

oraz mamy zależności $(2.3.1)_{4,5,6}$,

c) jeżeli

(1.5) $$\varepsilon_{11} \le 0 \quad \text{i} \quad \varepsilon_{22} > 0 \ ,$$

to

(1.6) $$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{11}+\nu_M(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right] \ , \\ \sigma_{22} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{22}+\nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})\right]+p_2E_{Z2}\varepsilon_{22} \ , \\ \sigma_{33} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{33}+\nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right] \end{aligned}$$

oraz mamy zależności $(2.3.1)_{4,5,6}$,

d) jeżeli

(1.7) $$\varepsilon_{11} \le 0 \quad \text{i} \quad \varepsilon_{22} \le 0 \ ,$$

to

(1.8) $$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{11}+\nu_M(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right] \ , \\ \sigma_{22} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{22}+\nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})\right] \ , \\ \sigma_{33} &= \frac{E_M(1-p_1-p_2)}{1-\nu_M-2\nu_M^2}\left[(1-\nu_M)\varepsilon_{33}+\nu_M(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right] \end{aligned}$$

oraz mamy zależności $(2.3.1)_{4,5,6}$.

Uwaga: W programie ABAQUS zaprogramowany jest model sprężystości wg schematu pokazanego na rys.1.1. W zagadnieniach przestrzennych (lub płaskich) sprężystości model ten wymaga sprawdzenia naprężeń głównych i wprowadzenia w zbiorze naprężeń głównych ograniczenia o postaci: $\sigma_i \geq 0$, $(i = 1,2,3)$, którego konsekwencją jest wyzerowanie macierzy sztywności, w sytuacji gdy $\sigma_i < 0$. W instrukcji programu zamieszczona jest uwaga, że model ten może stwarzać znaczne trudności numeryczne.

3.2. Modyfikacja modelu z uwzględnieniem kruchego pękania włókien

W wielu przypadkach siatki wykonane są z materiałów kruchych (np. szkła), por. rys.2.1 i 2.2. Wobec tego konieczne jest uwzględnienie tego faktu w relacjach konstytutywnych modelu kompozytu, co prowadzi do następujących związków (1.1), w których należy zmienić ograniczenia, np.: relacja (2.1.4) obowiązuje wtedy gdy:

(2.1) $$\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 \in [0, \varepsilon_{k1}] \quad i \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 \in [0, \varepsilon_{k2}],$$

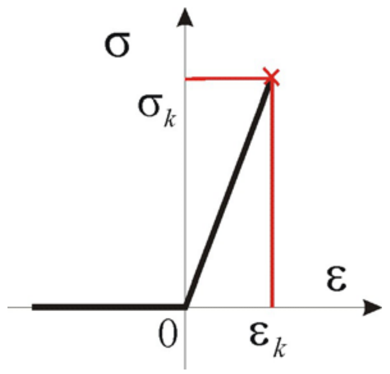
jeżeli

(2.2) $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 \in [0, \varepsilon_{k1}]$ i $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 < 0$ albo $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 \in [0, \varepsilon_{k1}]$ i $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_2 > \varepsilon_{k2}$,

to

(2.3) $$\boldsymbol{\sigma} = a\boldsymbol{\varepsilon} + b(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + c(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1$$

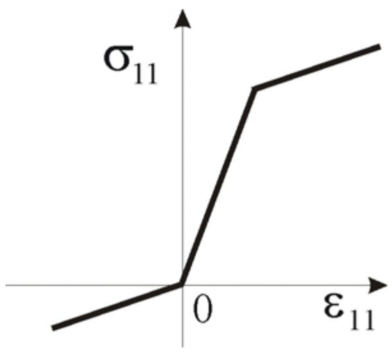
oraz podobnie w pozostałych przypadkach, por. (1.1). W powyższych wzorach odkształcenia $\varepsilon_{k\alpha}$ są odkształceniami, przy których następuje zerwanie α rodziny włókien.



Rys.2.1. Jednowymiarowy model związku fizycznego $\sigma(\varepsilon)$ dla materiału kruchego nie przenoszącego ściskania.
Relacje konstytutywne są następujące:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \in [0, \varepsilon_k], \\ 0, & \varepsilon < 0 \quad albo \quad \varepsilon > \varepsilon_K. \end{cases}$$

ε_k jest odkształceniem przy zerwaniu włókna.



Rys.2.2. Typowy wykres związku między naprężeniami i odkształceniami w teście jednoosiowego ściskania/rozciągania kompozytu z kruchymi włóknami. Szczegółowy opis i interpretacja w tekście.

Uwaga: Model podany powyżej można uogólnić wprowadzając zamiast kryterium zerwania rodziny włókien kryterium (albo hipotezę) utraty współpracy matrycy ze zbrojeniem oraz kryterium zerwania włókna. W konsekwencji prowadzi to do bardzo złożonych relacji konstytutywnych niż podane w tym punkcie. Podstawową jednak trudnością jest racjonalne ustalenie wymienionych hipotez i należy zaznaczyć, że w mechanice kompozytów zagadnienie to jest w fazie badań podstawowych.

3.3. Interpretacja testu jednoosiowego ściskania/rozciągania w przypadku modelu nieliniowego

Jako prosty przykład ilustrujący pracę modelu z pkt.3.1-3.2 zamieszczamy wyniki dotyczące zadania jednoosiowego ściskania/rozciągania. W przypadku modelu liniowego interpretacje wszystkich podstawowych testów doświadczalnych realizowanych naprężeniowo wynikają z postaci macierzy podatności. Natomiast interpretacja testów realizowanych odkształceniowo, zarówno w przypadku modelu liniowego jak i nieliniowego, wynika bezpośrednio z relacji konstytutywnych tych modeli. W przypadku modelu nieliniowego interpretacje testów naprężeniowych są bardziej złożone.

Prześledzimy obecnie przewidywania modeli wg pkt.2 i pkt.3.1-3.2 w teście jednoosiowego stanu naprężenia. Niech $\sigma_{11} = \sigma$ oraz pozostałe składowe stanu naprężenia są zerowe, czyli rozpatrujemy ściskanie/rozciąganie wzdłuż kierunku, który jest zgodny z ułożeniem pierwszej rodziny włókien w kompozycie ($\mathbf{m}_1 = \mathbf{b}_1 = \overline{\mathbf{n}}$). Z (2.1.1) (albo (2.1.4)) wynika, że odkształcenia kątowe są zerowe (czyli odkształcenia w kompozycie są odkształceniami głównymi). Natomiast z $(2.3.1)_{1,2,3}$, czyli w przypadku modelu liniowego, otrzymamy (w celu uproszczenia oznaczeń opuszczamy dolne M w stałych sprężystości matrycy, tzn.: $E \equiv E_M$, $\nu \equiv \nu_M$):

$$
(3.1)\qquad
\begin{gathered}
\sigma = \frac{E(1-p_1-p_2)}{1-\nu-2\nu^2}\left[(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\right] + p_1 E_{Z1}\varepsilon_1 \ , \\
\frac{E(1-p_1-p_2)}{1-\nu-2\nu^2}\left[(1-\nu)\varepsilon_2 + \nu(\varepsilon_1+\varepsilon_3)\right] + p_2 E_{Z2}\varepsilon_2 = 0 \, , \\
(1-\nu)\varepsilon_3 + \nu(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0 \ .
\end{gathered}
$$

Z $(3.1)_3$ wynika, że

$$
(3.2)\qquad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \ ,
$$

co pozwala wyeliminować składową ε_3 z $(3.1)_{1,2}$. Z $(3.1)_2$ otrzymamy:

$$
(3.3)\qquad
\begin{gathered}
\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1 \frac{(1-p_1-p_2)}{(1-p_1-p_2)+p_2\eta_2(1-\nu^2)} = -\nu\varepsilon_1 \frac{p_M}{p_M + p_2\eta_2(1-\nu^2)} = -\nu\varepsilon_1 D_2 \ , \\
\eta_2 = \frac{E_{Z2}}{E}, \quad p_M = 1 - p_1 - p_2 \ ,
\end{gathered}
$$

czyli znak odkształcenia ε_2 jest przeciwny do odkształcenia ε_1, gdyż $D_2 > 0$ oraz dla typowych materiałów mamy $\nu \in (1,1/2)$ (**uwaga:** w materiale bez siatki mamy $D_2 = 1$ jak być powinno). Po podstawieniu (3.2) i (3.3) do $(3.1)_1$ otrzymamy:

$$
(3.4)\qquad
\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \sigma \frac{p_M + p_2\eta_2(1-\nu^2)}{E p_M\left[(p_1\eta_1 + p_2\eta_2) + p_M + p_1\eta_1 p_2\eta_2(1-\nu^2)\right]} = \frac{1}{\widetilde{E}_1}\sigma, \\
\eta_1 = \frac{E_{Z1}}{E} \ ,
\end{gathered}
$$

gdzie $\widetilde{E}_1 > 0$, czyli znak odkształcenia ε_1 jest zgodny ze znakiem naprężenia σ. Wobec tego w przypadku modelu z pkt.2.1 związki na odkształcenia główne ε_1, ε_2 i ε_3, w teście jednoosiowego ściskania/ rozciągania, mają odpowiednio postać (3.4) oraz

(3.5)
$$\varepsilon_2 = -\nu\frac{D_2}{\widetilde{E}_1}\sigma, \qquad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(1-\nu D_2)\frac{\sigma}{\widetilde{E}_1} .$$

Jeżeli ściskanie/rozciąganie jest w kierunku zgodnym z wersorem drugiej rodziny włókien $\mathbf{m}_2 = \mathbf{b}_2 = \overline{\mathbf{n}}$, to we wzorze (3.3)$_2$ występuje $p_1\eta_1$ (stała D_1) zamiast $p_2\eta_2$ oraz

(3.6)
$$\frac{1}{\widetilde{E}_2} = \frac{p_M + p_1\eta_1(1-\nu^2)}{Ep_M\left[(p_1\eta_1 + p_2\eta_2) + p_M + p_1\eta_1 p_2\eta_2(1-\nu^2)\right]} .$$

Obowiązuje zależność:

(3.7)
$$\frac{D_2}{\widetilde{E}_1} = \frac{D_1}{\widetilde{E}_2} ,$$

z której wynika, że

(3.8)
$$\widetilde{\nu}_{12} = \nu D_2 , \qquad \widetilde{\nu}_{21} = \nu D_1 .$$

Podobnie postępujemy rozpatrując test ściskania/rozciągania w kierunku prostopadłym do powierzchni siatki. Zauważmy, że otrzymane zależności są zgodne z ogólnymi wzorami (2.2.9)-(2.2.10) oraz interpretacją składowych macierzy podatności (2.3.3). Możemy wobec tego opuścić symbol fali nad wyprowadzonymi stałymi technicznymi kompozytu wg modelu z pkt.2.1.

W przypadku modelu z pkt.3.1 i testu jednoosiowego, zgodnego z wersorem $\mathbf{m}_1 = \mathbf{b}_1 = \overline{\mathbf{n}}$, zależności są bardziej złożone, ponieważ wzory (1.1)$_{1,2}$ obowiązują tylko w przypadku a). Nie ulega zmianie wzór (3.1)$_3$. Należy niezależnie rozpatrzyć rozciąganie $\sigma > 0$ i ściskanie $\sigma < 0$ oraz znaki odkształceń głównych. Jeżeli $\sigma > 0$, to $\varepsilon_1 > 0$ i $\varepsilon_2 < 0$, czyli zamiast (3.1)$_2$ mamy zależność wynikającą z (3.4)$_2$:

(3.9)
$$(1-\nu)\varepsilon_2 + \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = 0$$

oraz (1.1)$_3$, z których wynika, że

(3.10)
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 .$$

Podstawiając (3.10) do (3.1)$_1$ otrzymamy

(3.11)
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E(p_M + \eta_1 p_1)}\sigma .$$

Jeżeli $\sigma < 0$, to $\varepsilon_1 < 0$ i $\varepsilon_2 > 0$, czyli zamiast (3.1)$_1$ (obowiązuje zależność (3.1)$_2$) mamy związek wynikający z (3.6)$_1$:

(3.12)
$$\sigma = \frac{E(1-p_1-p_2)}{1-\nu-2\nu^2}\left[(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right] .$$

Na odkształcenie ε_2 mamy zależność identyczną jak (3.3), którą łącznie ze związkiem (3.1)$_3$ należy uwzględnić w (3.12). W wyniku otrzymamy:

(3.13)
$$\varepsilon_1 = \frac{p_M + p_2\eta_2(1-\nu^2)}{E(p_M + \eta_2 p_2)}\sigma .$$

Oznacza to, że model kompozytu nieliniowego przewiduje w teście ściskania w kierunku pierwszej rodziny włókien następujący zastępczy moduł sztywności:

(3.14)
$$E_{1s} = \frac{E(p_M + \eta_2 p_2)}{p_M + p_2\eta_2(1-\nu^2)},$$

natomiast w teście rozciągania zastępczy moduł sztywności o postaci:

(3.15)
$$E_{1r} = E(p_M + \eta_1 p_1).$$

Zauważmy, że dla typowych danych mamy $E_{1r} > E_{1s}$, por. rys.1.2.

Jeżeli uwzględnimy pękanie rodzin włókien wg modelu z pkt.3.2 musimy dodatkowo rozpatrzyć sytuacje gdy $\varepsilon_1 > \varepsilon_{k1}$ i $\varepsilon_2 > \varepsilon_{k2}$. Na przykład jeżeli $\varepsilon_1 > \varepsilon_{k1}$, to zamiast modułu (3.15) mamy Ep_M, czyli pracuje tylko matryca, por. rys.2.2.

W przypadku testu ściskana/rozciągania w kierunku zgodnym z drugą rodziną włókien $\mathbf{m}_2 = \mathbf{b}_2 = \overline{\mathbf{n}}$ otrzymamy:

(3.16)
$$E_{2r} = E(p_M + \eta_2 p_2), \quad E_{2s} = \frac{E(p_M + \eta_1 p_1)}{p_M + p_1\eta_1(1-\nu^2)}.$$

Zauważmy, że w najprostszym modelu kompozytu dwukierunkowo zbrojonego występuje efekt „współpracy” wzajemnie prostopadłych rodzin włókien, co jest szczególnie widoczne we wzorach na efektywne moduły sztywności kompozytu, patrz np. wzory (3.4) i (3.6). Uwzględnienie dodatkowych „wyidealizowanych” własności rodzin włókien powoduje, że efektywne sztywności kompozytu ściskanego (jednokierunkowo albo dwukierunkowo) są mniejsze niż kompozytu rozciąganego.

Uwaga: Często w literaturze mówi się, w kontekście stosowania siatek w funkcji zbrojenia, o siatkach jako o membranach, które przenoszą siły rozciągające. W mechanice membraną nazywa się warstwę (bardzo cienką płytę o grubości h), której sztywność na zginanie można pominąć. Sztywność membrany (i jej zdolność do przenoszenia obciążeń prostopadłych do powierzchni środkowej) zapewniają tylko siły jej naciągu (podobnie jak w cięgnie). Równanie na ugięcie membrany ortotropowej we współrzędnych kartezjańskich jest następujące (o interpretacji lokalnego równania równowagi w przemieszczeniach):

(3.17)
$$N_1 \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + N_2 \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -q(x_1, x_2),$$

gdzie w jest ugięciem powierzchni środkowej membrany, a q jest obciążeniem powierzchniowym (prostopadłym do powierzchni membrany), zaś $N_1 > 0$ i $N_2 > 0$ są siłami naciągu (w jednostkach siły przez jednostkę długości) odpowiednio w kierunku 1 i 2. Naprężenia występujące w membranie są naprężeniami głównymi i rozciągającymi oraz wynoszą: $\sigma_\alpha = N_\alpha / h$. Widzimy, że w teorii membran nie występuje żadna stała materiałowa sprężystości materiału membrany. Istotne jest tylko, że siły naciągu muszą być mniejsze od odpowiednich wytrzymałości membrany w kierunkach 1 i 2. W tym właśnie sensie, w przypadku siatek istotne są jej parametry wytrzymałościowe uzyskane w testach rozciągania. Wzór (3.17) podaliśmy w najprostszej sytuacji gdy siły naciągu tworzą jednorodne pole wektorowe w obszarze membrany. Równania (3.17) uzupełnia się odpowiednimi warunkami brzegowymi typu Dirichleta i Neumanna. W najprostszej sytuacji zadane są przemieszczenia na brzegu membrany (czyli mamy zagadnienie Dirichleta dla równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu).

4.Optymalna aproksymacja liniowo-sprężystego ortotropowego modelu kompozytu modelem izotropowym

Celem tego punktu jest wyprowadzenie aproksymacyjnego modelu kompozytu z pkt.2.1 o izotropowych własnościach sprężystych.

4.1. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia optymalizacji

Z algebry podwójnie symetrycznych tensorów czwartego rzędu wynika, że tensory Hooke'a tworzą euklidesową przestrzeń o 21 wymiarach. Wprowadzenie tensorowych baz ortonormalnych pozwala na zastosowanie własności izomorfizmu między reprezentacjami tensorów sztywności a symetrycznymi, dodatnio określonymi macierzami 6×6 (**uwaga:** nie istnieje izomorfizm jeżeli stosujemy tzw. notację Voigta i wynikającą z tego reprezentację tensorów sztywności i podatności). Formułując wobec tego zagadnienia algebraiczne i analityczne dla tensorów Hooke'a możemy zastosować wyniki algebry i analizy macierzy, por. Rychlewski (2000,2001), Jemioło (1999,2003) i literaturę tam cytowaną.

Formułujemy następujący problem optymalizacyjny: załóżmy, że dany jest tensor sztywności materiału anizotropowego $\mathbf{C}_A$, należy znaleźć taki tensor izotropowy $\mathbf{C}_I$ aby realizowane było minimum funkcji odległości między tymi tensorami:

(1.1) $$\min_{\mathbf{C}_I} d(\mathbf{C}_A, \mathbf{C}_I) \ ,$$

gdzie $d(\mathbf{C}_A, \mathbf{C}_I) = \|\mathbf{C}_A - \mathbf{C}_I\|$, zaś $\|\mathbf{C}\| = \sqrt{\mathbf{C} : \mathbf{C}} \equiv \sqrt{\mathrm{Tr}\mathbf{C}^2}$.

W każdym przypadku istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu (1.1) o następującej postaci:

(1.2) $$\mathbf{C}_I = \frac{K_1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + K_2\left(\mathbf{1} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right) \ ,$$

gdzie

(1.3) $$K_1 = \frac{1}{3}\mathbf{I}\cdot\mathbf{C}_A\cdot\mathbf{I} \ , \quad K_2 = \frac{1}{5}\left(\mathrm{Tr}\mathbf{C}_A - K_1\right) \ .$$

Z (1.6) (przy oznaczeniach (2.3)) oraz (4.2)-(4.3) wynika, że rozwiązanie problemu optymalizacyjnego dla rozpatrywanego kompozytu jest następujące:

(1.4) $$K_{K1} = a + 3b + \frac{1}{3}(c+d) \ , \quad K_{K2} = a + \frac{2}{15}(c+d) \ .$$

Moduły Kelvina (1.4), odpowiednio zmian objętościowych i ścinania są efektywnymi, modułami sztywności, izotropowej aproksymacji kompozytu z dwoma ortogonalnymi rodzinami włókien. Model aproksymacyjny przewiduje wzrost sztywności kompozytu względem materiału matrycy i dotyczy to wszystkich rodzajów odkształceń. Należy podkreślić, że model ortotropowy wg pkt.2 nie zmienia modułów sztywności związanych z deformacjami kątowymi.

Zauważmy, że gdy $c = d = 0$, to otrzymamy z (1.4) moduły Kelvina matrycy.

Ponieważ:

(1.5) $$K_{K1} = \frac{E_K}{1+\nu_K} \ , \quad K_{K1} = \frac{E_K}{1-2\nu_K} \ ,$$

to z (1.4) i (1.5) wynika, że moduł Younga i współczynnik Poissona izotropowego modelu aproksymacyjnego kompozytu z siatką regularną są następujące:

(1.6)
$$E_K = \frac{(3a+9b+c+d)(15a+2c+2d)}{3(15a+30b+4c+4d)} = \frac{E\left[2(1-\nu-2\nu^2)(p_1\eta_1+p_2\eta_2)^2+3p_M(7-8\nu)(p_1\eta_1+p_2\eta_2)+45p_M^2\right]}{12(1-\nu-2\nu^2)(p_1\eta_1+p_2\eta_2)+45p_M},$$

(1.7)
$$\nu_K = \frac{15b+c+d}{15a+30b+4c+4d} = \frac{(1-\nu-2\nu^2)(p_1\eta_1+p_2\eta_2)+15\nu p_M}{4(1-\nu-2\nu^2)(p_1\eta_1+p_2\eta_2)+15p_M}.$$

4.2. Interpretacja wyników

Wzory (1.6) i (1.7) mają prostą strukturę, gdyż współczynnik ν_K (wielkość bezwymiarowa) jest zależny od współczynnika Poissona materiału matrycy $\nu \in (-1,1/2)$, udziału objętościowego matrycy w kompozycie $p_M = 1 - p_1 - p_2$ oraz sumy:

(2.1)
$$p_1\eta_1 + p_2\eta_2 = p_1\frac{E_{Z1}}{E} + p_2\frac{E_{Z2}}{E} \equiv \kappa,$$

dodatkowo, aproksymacyjny moduł sztywności E_K jest zależny od modułu Younga matrycy $E > 0$, co jest oczywiste. Graniczne wartości są następujące: jeżeli $p_1 = p_2 = 0$, to wtedy $p_M = 1$ i z (1.6) otrzymamy $E_K = E$, a z (1.7) $\nu_K = \nu$, jak być powinno, natomiast jeżeli $p_1 + p_2 = 1$, to wtedy $p_M = 0$ i z (1.6) otrzymamy $E_K = (p_1E_{Z1} + p_2E_{Z2})/6$, a z (1.7) $\nu_K = 1/4$ (**uwaga:** współczynnik Poissona równy ¼ otrzymuje się w teorii sprężystości materiałów izotropowych, w której zakłada się, że siły oddziaływania międzycząsteczkowego są centralne). Także z tego wynika formalna poprawność wzorów (1.6) i (1.7). Wobec tego wzory (1.6) i (1.7) możemy zapisać następująco:

(2.2)
$$E_K(E,\nu,p_M,\kappa) = \frac{E\left[2(1-\nu-2\nu^2)\kappa^2+3p_M(7-8\nu)\kappa+45p_M^2\right]}{12(1-\nu-2\nu^2)\kappa+45p_M},$$

(2.3)
$$\nu_K(\nu,p_M,\kappa) = \frac{(1-\nu-2\nu^2)\kappa+15\nu p_M}{4(1-\nu-2\nu^2)\kappa+15p_M}.$$

Przykładowe wykresy funkcji (2.2) i (2.3) zamieszczono na rys.2.1-2.3. Moduł Younga kompozytu jest liniowo zależny od modułu sztywności matrycy. Pomimo złożonej zależności E_K od pozostałych parametrów, to na rys.2.1 widzimy praktycznie liniowe wykresy funkcji (2.2) przy ustalonych wielkościach p_M i ν (rys.2.1a) oraz ustalonych κ i ν (rys.2.1b). Wynika to z rozwinięcia (2.2) w szereg Maclaurina względem κ:

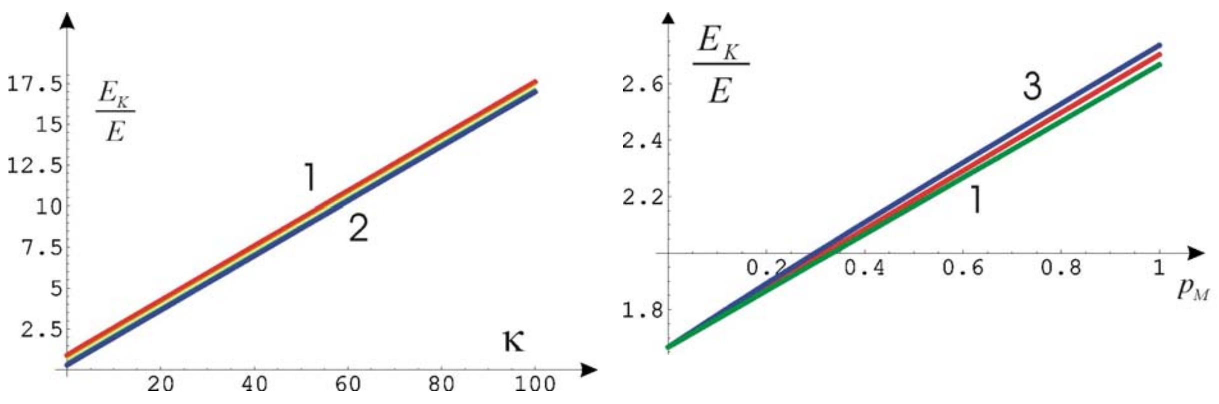
(2.4)
$$\frac{E_K}{E}(\nu,p_M,\kappa) = p_M + \frac{1}{15}(3-4\nu+8\nu^2)\kappa + O(\kappa^2)$$

oraz z rozwinięcia (2.2) w szereg Maclaurina względem p_M:

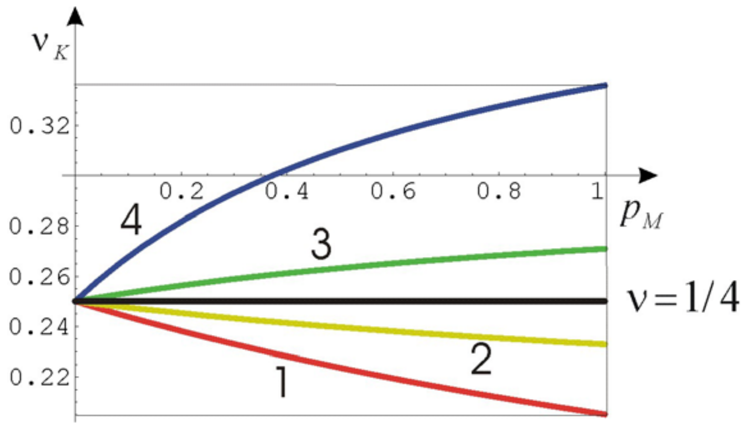
(2.5)
$$\frac{E_K}{E}(\nu,p_M,\kappa) = \frac{\kappa}{6} + \frac{9-16\nu}{8(1-\nu-2\nu^2)}p_M + O(p_M^2).$$

W przypadku danych, dla których wykonano wykresy na rys.2.1, widzimy wyraźny efekt zwiększenia sztywności kompozytu (na ściskanie jak i rozciąganie) w wyniku wprowadzenia do matrycy siatki zbrojeniowej (patrz wzór (2.4) i rys.2.1a) oraz w wyniku wypełnienia siatki matrycą (patrz wzór (2.5) i rys.2.1b).

a) b)



Rys.2.1. Wykresy przeskalowanego (przez moduł sztywności matrycy E) modułu Younga modelu aproksymacyjnego kompozytu zbrojonego siatką wg (2.2), a) E_K/E jako funkcja zależna od κ, dla $\nu = 1/4$ oraz 1) $p_M = 0.9$ i 2) $p_M = 0.3$, b) E_K/E w funkcji p_M, dla $\kappa = 10$ oraz 1) $\nu = 0.1$, 2) $\nu = 1/4$ i 3) $\nu = 0.4$. **Uwaga:** w przypadku $\kappa = const$, mamy $p_M \in [0,1)$.

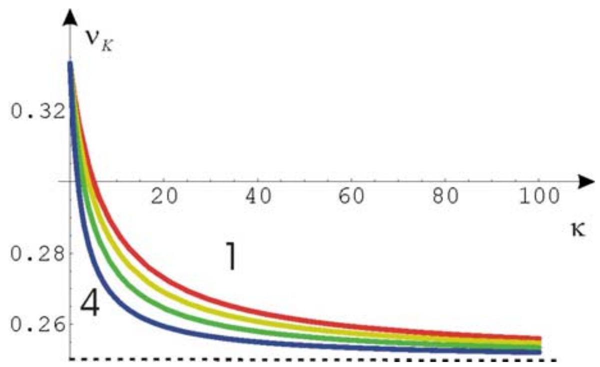


Rys.2.2. Wykresy współczynnika Poissona modelu aproksymacyjnego kompozytu zbrojonego siatką wg (2.3) w funkcji p_M, dla $\kappa = 10$ oraz 1) $\nu = 0.1$, 2) $\nu = 0.2$, 3) $\nu = 0.3$ i 4) $\nu = 0.4$.

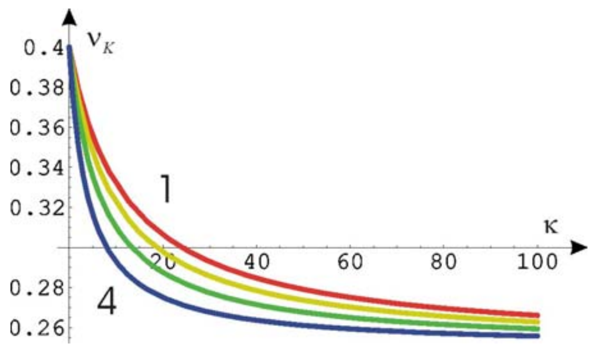
Charakterystyczna wartość współczynnika Poissona to $1/4$, gdyż wtedy z (2.3) otrzymamy $\nu_K = \nu = 1/4$ (patrz rys.2.2) oraz zasadniczo różne są wykresy tej funkcji, w zależności od κ, dla $\nu \in (-1, 1/4)$ i $\nu \in (1/4, 1/2)$, por. rys.2.2 i 2.3. Jeżeli $\nu \in (1/4, 1/2)$ to $\nu_K(\kappa)$ jest funkcją monotonicznie malejącą od ν do $1/4$, patrz rys.2.3a i b, natomiast jeżeli $\nu \in (-1, 1/4)$ to $\nu_K(\kappa)$ jest funkcją monotonicznie rosnącą od ν do $1/4$.

W przypadku nieściśliwego materiału matrycy otrzymujemy zawsze $\nu_K = \nu = 1/2$, patrz wzór (2.3).

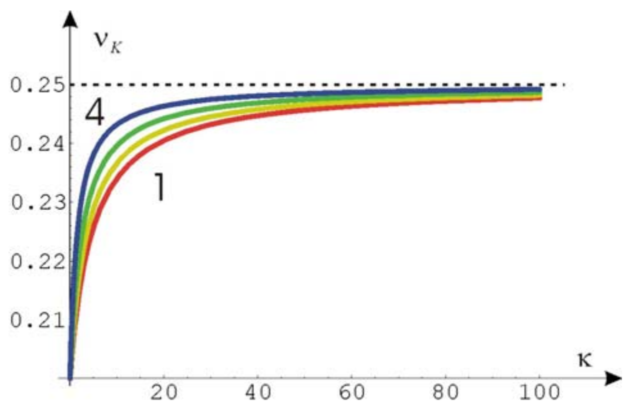
a)



b)



c)



Rys.2.3. Wykresy współczynnika Poissona modelu aproksymacyjnego kompozytu zbrojonego siatką wg (2.3) w funkcji κ, a) $\nu = 0.1/3$, b) $\nu = 0.4$, c) $\nu = 0.2$, krzywe: 1) $p_M = 0.9$, 2) $p_M = 0.7$, 3) $p_M = 0.5$ i 4) $p_M = 0.3$.

Należy zaznaczyć, że model aproksymacyjny nie zawsze przewiduje wzrost sztywności względnej kompozytu w stosunku do materiału matrycy, co ilustruje poniższy przykład. Wynika to także bezpośrednio ze wzoru (2.4), który jest przybliżeniem wzoru (2.2). Jeżeli $\frac{1}{15}\left(3 - 4\nu + 8\nu^2\right)\kappa < 1 - p_M$, to otrzymamy efekt osłabienia materiału. Oznacza to, że moduły sztywności rodzin zbrojenia powinny być (w przybliżeniu) o rząd wielkości większe niż moduł sztywności matrycy aby uzyskać pożądany efekt wzrostu sztywności względnej.

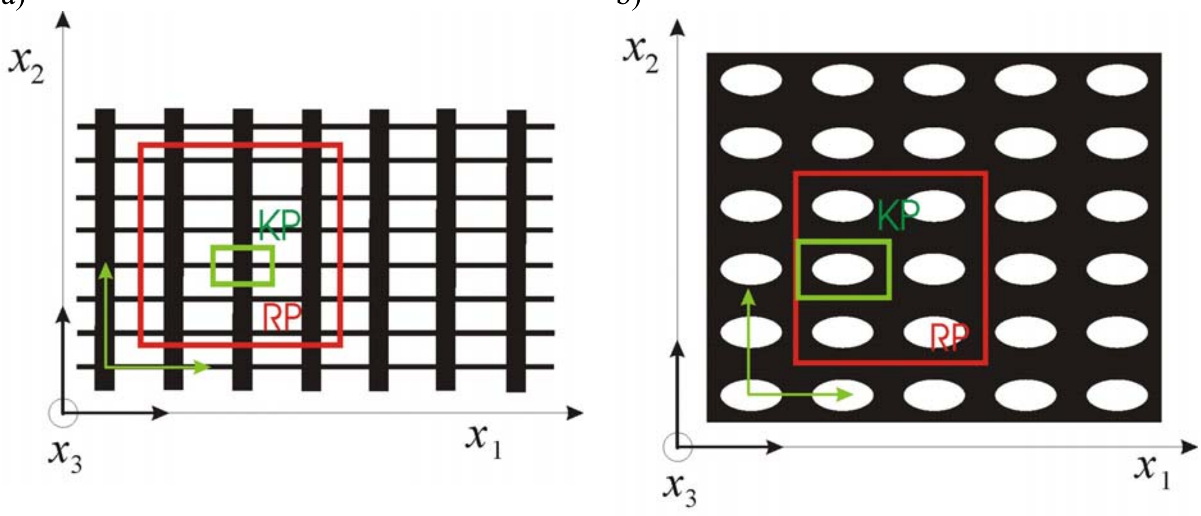
Przykład: Niech dane będą następujące wielkości dotyczące odpowiednio matrycy i siatek zbrojenia: a) $E = 2.8\,\text{GPa}$, $\nu = 0.4$, $p_M = 0.6$ oraz $p_1 = 0.1$, $E_{Z1} = 25.0\,\text{GPa}$, $p_2 = 0.2$, $E_{Z2} = 30.0$ GPa (uwzględniono niepełne wypełnienie oczek siatek materiałem matrycy), to ze wzorów (2.2) i (2.3) otrzymamy ok.: $E_K = 3.17\,\text{GPa}$ oraz $\nu_K = 0.36$. Wynika z tego, że względny wzrost modułu sztywności materiału zbrojonego w stosunku do materiału matrycy: $(E_K - E)/E$ (nazwijmy to efektywnością zbrojenia) wynosi ok. 13%. Natomiast jeżeli mamy: b) $p_M = 0.4$ oraz $p_1 = 0.2$ i $p_2 = 0.3$, przy pozostałych danych jednakowych, to otrzymamy: $E_K = 3.54\,\text{GPa}$ i $\nu_K = 0.33$ oraz efektywność zbrojenia ok. 26%. Jeżeli w przykładzie b) $E = 20\,\text{GPa}$ i $\nu = 0.2$, przy pozostałych danych jednakowych, to $E_K = 10.35\,\text{GPa}$ i $\nu_K = 0.21$ oraz efektywność zbrojenia ok. -48%, co oznacza bezcelowość wprowadzenia w tym przypadku siatki do matrycy.

5. Optymalna aproksymacja ortotropowego związku Hooke'a PSN materiałem izotropowym PSN oraz interpretacja wyniku w przypadku modelu przestrzennego kompozytu o izotropowej matrycy zbrojonej siatką

5.1. Uwagi wstępne

Proponując model konstytutywny siatki często rozpatruje się ją jako pewien materiał ortotropowy pracujący w płaskim stanie naprężenia (PSN). Podstawową wtedy sprawą jest ustalenie reprezentatywnej powierzchni siatki (reprezentatywnej próbki RP), tak aby założenie o kontinuum było akceptowalne. Wymiary reprezentatywnej próbki zależą od parametrów geometrycznych siatki (czyli komórki periodyczności KP) oraz rodzaju wykonywanego testu doświadczalnego i sposobu zamocowania próbki w maszynie wytrzymałościowej, aby efekty brzegowe były pomijalne. Także w symulacji MES pracy siatki wybór adekwatnej KP i RP jest istotny, ze względu na przybliżony charakter obliczeń oraz przyjmowane warunki brzegowe, por. pkt.S.2.4.2. W matematycznej teorii homogenizacji materiałów o strukturze periodycznej, której celem jest wyznaczenie efektywnej sztywności (albo podatności) wystarczająca jest znajomość KP, gdyż rozwiązując zagadnienie brzegowe na komórce zakłada się odpowiednie warunki periodyczności, a w przejściu granicznym do kontinuum wymiary komórki KP dążą do zera. Stosując standardowe oprogramowanie MES nie wykonuje się wymienionego przejścia granicznego i dlatego obliczenia MES, przeprowadzane w celu wyznaczenia własności efektywnych, nazywa się homogenizacją numeryczną.

a) b)



Rys.1.1. Schematyczny rysunek siatek w kartezjańskim układzie współrzędnych zgodnym z kierunkami głównymi ortotropii reprezentatywnej próbki RP. RP złożona jest z komórek periodyczności KP.

W inżynierii materiałów anizotropowych (kompozytów, kryształów, itp.) stałe techniczne ortotropii (nazywane często własnościami efektywnymi) wyznacza się z klasycznych testów doświadczalnych jednoosiowego rozciągania próbki RP w kilku kierunkach oraz testu ścinania. Oczywiście podstawowe są testy rozciągania w kierunkach wzajemnie ortogonalnych (np. zgodnych z kierunkami rodzin włókien, albo w ogólności kierunkami głównymi anizotropii), z których standardowo wyznacza się moduły Younga. Z reguły tego typu testy wykonuje się jako badania standardowe w przypadku siatek. Nie są one jednak wystarczające do określenia stałych sprężystości modelu ortotropowego, patrz pkt.5.2.

Reprezentatywną monografią, z punktu widzenia zastosowań technicznych, materiałów o strukturze komórkowej jest bardzo popularny podręcznik Gibson i Ashby'go (1988), w którym rozpatrywane są wybrane modele konstytutywne tych materiałów, łącznie z analizą określenia ich efektywnych własności mechanicznych. Należy podkreślić, że najwięcej prac w tej dziedzinie dotyczy wyrobów o strukturze plastra miodu.

Klasyfikacje geosyntetyków stosowanych w drogownictwie podane są m.in. w podręcznikach Bugajskiego i Grabowskiego (1999) oraz Wesolowskiego, Krzywosza i Brandyka (2000). Zalecenia dotyczące stosowania geowyrobów w warstwach asfaltowych nawierzchni drogowych podane są w pracy Zawadzkiego, Sybilskiego i Skierczyńskiego (2004), por. także pracę Gołosa (2005) oraz literaturę na ten temat cytowaną w Sprawozdaniu z 2005 roku.

Ponieważ w standardowej metodzie mechanistycznej (oraz dostępnym oprogramowaniu) stosowane jest założenie o izotropowości poszczególnych warstw nawierzchni (patrz cytowane Katalogi IBDiM), to ważnym problemem jest także racjonalne zaproponowanie aproksymacji makroskopowo ortotropowego modelu siatki modelem izotropowym, co pokazujemy w pkt.5.3.

5.2. Siatka jako kontynualny materiał ortotropowy

Przypominamy, że w przypadku PSN i dowolnego materiału ortotropowego mamy następujący odwrotny związek Hooke'a w otronormalnych bazach tensorowych (kierunki główne ortotropii są zgodne z kierunkami układu współrzędnych, patrz rys.4.1), por.S.1.5.15:

(2.1)
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix},$$

gdzie

(2.2)
$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} .$$

Oznacza to, że konieczne jest wyznaczenie czterech niezależnych stałych sprężystości. Na przykład z testu jednoosiowego rozciągania w kierunku 1 ($\sigma_{11} = \sigma$ oraz $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$), w którym wykonujemy pomiary odkształceń ε_{11} i ε_{22}, otrzymamy moduł E_1 i współczynnik Poissona ν_{12}. Podobnie z testu jednoosiowego rozciągania w kierunku 2 otrzymamy E_2 i ν_{21}. Zależność (2.2) jest sprawdzeniem dokładności wykonanych testów. Pomiary odkształceń w kierunku prostopadłym do kierunku rozciągania są z reguły obarczone dużym błędem. Dlatego często wykonuje się test równomiernego dwuosiowego rozciągania ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$ oraz $\sigma_{12} = 0$) i dokonuje pomiaru odkształceń ε_{11} i ε_{22}. Wtedy współczynniki Poissona, przy znanych modułach E_1 i E_2, odkształceniach ε_{11} i ε_{22} oraz naprężeniu $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$, możemy obliczyć z następujących zależności:

(2.3)
$$\nu_{21} = 1 - \frac{E_2}{\sigma}\varepsilon_{22} , \qquad \nu_{12} = 1 - \frac{E_1}{\sigma}\varepsilon_{11} .$$

Z testu ścinania ($\sigma_{12} = \tau$ oraz $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$), w którym dokonujemy pomiaru kąta odkształcenia postaciowego otrzymamy G_{12}. W przypadku siatki test ścinania jest trudny do wykonania. Dlatego należy wykonać np. test jednoosiowego rozciągania w kierunku pod katem $\pi/4$ w stosunku do kierunków głównych ortotropii. Wtedy G_{12} otrzymamy z następującego wzoru:

(2.5) $$G_{12} = \frac{E_1 E_2 \sigma}{4E_1 E_2 \varepsilon - \left[E_1(1-\nu_{21}) + E_2(1-\nu_{12})\right]\sigma} \ .$$

We wzorze (2.5) σ jest naprężeniem rozciągającym, a ε jest odkształceniem w kierunku rozciągania.

Związek odwrotny do (2.1) jest następujący:

(2.6) $$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & -\dfrac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ -\dfrac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} .$$

W przypadku materiału izotropowego związek (2.3) ma znacznie prostszą postać gdyż

(2.7) $$E_1 = E_2 = \widetilde{E}\,, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \widetilde{\nu}$$

oraz

(2.8) $$2G_{12} = \widetilde{E}/(1+\widetilde{\nu}).$$

W przypadku materiału izotropowego i PSN ograniczenia na stałe sprężystości są następujące: $\widetilde{E} > 0$ i $\widetilde{\nu} \in (-1,1)$ oraz wynikają one z założenia o dodatniej określoności tensorów sztywności i podatności.

W Tablicy 2.1. zamieszczono przykładowe wartości technicznych stałych sprężystości modeli geosiatki i geowłókniny (wykonanych z polipropylenu) jako materiałów ortotropowych PSN wg pracy Perkinsa (2000). Dodatkowo w ostatnim wierszu podano stosunek E_1/E_2, który charakteryzuje stopień anizotropii tych materiałów w prostych jednoosiowych testach rozciągania. Zauważmy, że zarówno geosiatka, jak i geowłóknina ma bardzo małe wartości modułu G_{12} w stosunku do sztywności E_1 i E_2. Geowłóknina praktycznie nie przenosi tzw. czystego ścinania. Dodatkowe interpretacje o stopniu anizotropii podanych w Tablicy 2.1 materiałów ortotropowych wynikają z analizy tensora sztywności i twierdzenia o rozkładzie spektralnym tego tensora.

Tablica 2.1. Techniczne stałe sprężystości, dane wg pracy Perkinsa (2000)*

Techniczne stałe sprężystości	Geosyntetyk (geosynthetics)	
	Geosiatka (geogrid)	Geowłóknina (geotextile)
E_1 [MPa]	645	960
E_2 [MPa]	600	239
G_{12} [MPa]	30	1
ν_{12}	0.03225	0.5
ν_{21}	0.03	0.1245
E_1/E_2	1.075	4.017

* W pracy Perkinsa kierunek 1 oznaczany jest jako XM (cross machine direction), zaś kierunek 2 jako DM (machine direction). Stała G_{12} została wyznaczona z testu rozciągania pod kątem $\pi/4$ do

kierunku XM. Testy zostały wykonane na próbkach o wymiarach 280x750 mm, o bazie pomiarowej 240x250 mm. W wymienionej pracy zamieszczone są także wartości technicznych stałych sprężystości dla macierzy sztywności 3D materiału ortotropowego. Nie zamieszczamy ich, gdyż zostały one przyjęte a priori przez Perkinsa i nie wynikają z badań doświadczalnych.

W Tablicy 2.2 podane są wartości trzech niezależnych modułów Kelvina materiału ortotropowego PSN (wartości własnych macierzy sztywności (2.6) wg danych z Tablicy 2.1) oraz stosunków: K_1/K_2, K_1/K_3 i K_2/K_3. Tylko trzeci moduł Kelvina ma prostą interpretację modułu sztywności czystego ścinania, gdyż $K_3 = 2G_{12}$, por. Jemioło (1999). W pierwszym i drugim module Kelvina mamy sprzężenie sztywności na deformacje związane ze zmianą elementarnych pól powierzchni materialnych jak i ich postaci. Jeżeli materiał jest izotropowy to mamy jednokrotny moduł sztywności zmian pola powierzchni $\widetilde{K}_1$ i dwukrotny moduł sztywności ścinania $\widetilde{K}_2 = \widetilde{K}_3$, por. pkt.4.3. Wartości podane w Tablicy 2.2, które dotyczą geosiatki, sugerują, że racjonalne jest w tym przypadku poszukiwanie uproszczonego, izotropowego modelu kontynualnego. Wynika to z faktu, że $K_1/K_2 \cong 1$ oraz $K_1/K_3 \cong K_2/K_3$.

Tablica 2.2. Moduły Kelvina, dane do obliczeń przyjęto z Tablicy 2.1

Techniczne stałe sprężystości	Geosyntetyk (geosynthetics)	
	Geosiatka (geogrid)	Geowłóknina (geotextile)
K_1 [MPa]	652.81	1044.29
K_2 [MPa]	593.40	234.29
K_3 [MPa]	60	2
K_1/K_2	1.01	4.46
K_1/K_3	10.88	522.14
K_2/K_3	9.89	117.146

5.3. Aproksymacyjny model izotropowy

Stawiamy następujący problem: poszukujemy takiej macierzy sztywności materiału izotropowego:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\widetilde{E}}{1-\widetilde{\nu}^2} & -\dfrac{\widetilde{E}\widetilde{\nu}}{1-\widetilde{\nu}^2} & 0 \\ -\dfrac{\widetilde{E}\widetilde{\nu}}{1-\widetilde{\nu}^2} & \dfrac{\widetilde{E}}{1-\widetilde{\nu}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\widetilde{E}}{1+\widetilde{\nu}} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

która w sensie energetycznym (albo w sensie odległości w przestrzeni płaskich tensorów sztywności) jest optymalną aproksymacją macierzy sztywności materiału ortotropowego (2.6). To zagadnienie optymalizacji jest szczegółowo przedstawione w raporcie Jemioło (1999), gdzie także znajduje się omówienie literatury źródłowej na ten temat.

Postępując podobnie jak pokazaliśmy to w pkt.4 otrzymamy następujący wynik (omijamy tu stosunkowo proste, ale żmudne przekształcenia):

$$\widetilde{E}=\frac{[E_1(1+\nu_{21})+E_2(1+\nu_{12})][E_1(1-\nu_{21})+E_2(1-\nu_{12})-4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})]}{(1-\nu_{12}\nu_{21})[E_1(3+\nu_{21})+E_2(3+\nu_{12})+4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})]}\ , \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\nu}=\frac{E_1(1+3\nu_{21})+E_2(1+3\nu_{12})-4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1+3\nu_{21})+E_2(1+3\nu_{12})+4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}\ . \tag{3.3}$$

Jeżeli zachodzą związki (2.7) i (2.8), to z (3.2) i (3.3) otrzymujemy tożsamości jak być powinno.

Można sformułować zagadnienie optymalizacyjne w sensie minimalizacji odległości w przestrzeni płaskich tensorów podatności. Wtedy otrzymuje się następujący wynik (przekształcenia pomijamy):

$$\overline{E}=\frac{8E_1E_2G_{12}}{E_1E_2+G_{12}[E_1(3-\nu_{21})+E_2(3-\nu_{12})]}\ , \tag{3.4}$$

$$\overline{\nu}=\frac{4[E_1E_2+2(E_1+E_2)G_{12}]}{E_1E_2+G_{12}[E_1(3-\nu_{21})+E_2(3-\nu_{12})]}-3\ . \tag{3.5}$$

Model aproksymacyjny o stałych (3.4) i (3.5) można interpretować jako model, w którym uzgodniono naprężenia zgodnie z kryterium minimum „energii" komplementarnej (precyzyjniej-funkcji dopełniającej do funkcji jednostkowej energii sprężystości).

Jeżeli zachodzą związki:

$$E_1=E_2=\overline{E}\ ,\ \ \nu_{12}=\nu_{21}=\overline{\nu} \tag{3.6}$$

oraz

$$2G_{12}=\overline{E}/(1+\overline{\nu}), \tag{3.7}$$

to po podstawieniu ich w (3.6) i (3.7) otrzymujemy tożsamości jak być powinno.

Przykład 1: W Tablicy S.1.5.1 zamieściliśmy typowe dane dotyczące kompozytów zbrojonych włóknami. Obecnie uzupełniamy tę tablicę o wynik aproksymacyjny dwoma modelami izotropowymi, patrz Tablica 3.1. Dodatkowo w Tablicach 3.2 i 3.3 podane są stałe sprężystości typowych włókien i żywic. W przypadku włókien dane dotyczące właściwości mechanicznych są istotnie zależne od ich średnicy. Włókna bardzo cienkie (i stosunkowo krótkie) mają znacznie większą sztywność i wytrzymałość niż włókna grube. Wynika to z m.in. z technologii produkcji włókien. Zauważmy, że włókna mają prawie o dwa rzędy wielkości większą sztywność niż materiał matrycy. Kompozyt włóknisty (o znacznym udziale objętościowym włókien) ma w kierunku zbrojenia sztywność tego samego rzędu wielkości co włókno, patrz np. dane dotyczące żywicy epoksydowej z włóknami grafitowymi.

Celem przykładu jest m.in. pokazanie konsekwencji wynikających z aproksymacji modelu ortotropowego modelem izotropowym. Należy podkreślić, że otrzymaliśmy górne i dolne oszacowania modułów Younga i modułów ścinania, tzn.:

$$E_I\in\left[\overline{E},\widetilde{E}\right]\ ,\qquad G_I\in\left[\overline{G},\widetilde{G}\right]\ , \tag{3.8}$$

gdzie dolnym indeksem I oznaczyliśmy moduły, które mogą wynikać z innych aproksymacji modelu ortotropowego modelem izotropowym. Zauważmy, że wszystkie aproksymacje przewidują większy moduł ścinania materiału izotropowego niż moduł G_{12}. Im większy jest stosunek E_1/E_2 tym szersze są przedziały (3.8). Z przedstawionych aproksymacji wynika, że powinno się stosować modele aproksymacyjne w sytuacji gdy nie występują znaczne różnice między modułami E_1 i E_2.

Tablica 3.1. Dane dotyczące materiału ortotropowego zaczerpnięto z monografii Kurnika i Tylikowskiego (1997)

Techniczne stałe sprężystości	Żywica epoksydowa z włóknami:			
	grafitowymi	aramidowymi	szklanymi	borowymi
E_1 [GPa]	211	77.5	55	211
E_2 [GPa]	5.3	5.6	18.3	21.1
G_{12} [GPa]	2.6	2.1	9.1	7
ν_{12}	0.25	0.34	0.25	0.30
$\widetilde{E}$ [GPa]	74.22	29.37	31.75	82.87
$\widetilde{\nu}$	0.32	0.33	0.25	0.33
$\widetilde{G}$ [GPa]	28.05	11.05	12.74	31.18
$\overline{E}$ [GPa]	8.31	7.68	25.06	26.99
$\overline{\nu}$	0.21	0.30	0.20	0.33
$\overline{G}$ [GPa]	3.45	2.96	10.43	10.11

Tablica 3.2. Własności wybranych włókien

	RODZAJ WŁÓKNA				
PARAMETR	szklane E	szklane S	grafitowe	Kevlar 49	boron
Średnica [μm]	16	16	7 - 8	12	100 - 200
Ciężar właściwy [kN/m^3]	25.0	24.4	13.8-18.6	14.1	25.2-
Wytrzymałość na rozciąganie [GPa]	1.7-3.5	2.5-4.8	1.7-2.8	2.3-3.6	3.5
Moduł Younga [GPa]	72	86	230-250	120	400

Tablica 3.3. Własności żywic w temperaturze pokojowej

ŻYWICA		PARAMETR		
Rodzaj	Typ	Ciężar właściwy [kN/m^3]	Moduł Younga [GPa]	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]
epoksydowa	termoutwardzalna	10.8 - 13.7	2.1 - 5.5	40 - 85
fenolowa	termoutwardzalna	11.8 - 13.7	2.7 - 4.1	35 - 60
poliestrowa	termoutwardzalna	10.8 - 13.7	1.3 - 4.1	40 - 85
nylonowa	termoplastyczna	10.8	1.3 - 3.5	55 - 90
poliwęglanowa	termoplastyczna	11.8	2.1 - 3.5	55 - 70
polietylenowa	termoplastyczna	8.8 - 9.8	0.7 - 1.4	20 - 35

Przykład 2: Podobnie jak w Przykładzie 1, w Tablicy 3.4 zestawiono obliczenia dotyczące geosyntetyków o danych zestawionych w Tablicy 2.1. Sztywności geosentetyków są ponad stukrotnie mniejsze niż sztywności kompozytów włóknistych o epoksydowej matrycy zbrojonej włóknem szklanym i są kilkaset razy mniejsze niż sztywność włókien. Należy także zaznaczyć, że moduły Younga geosyntetyków zamieszczonych w Tablicy 3.4 są także znacznie mniejsze niż moduły Younga betonów asfaltowych (por. dane wg Tablicy S.1.3.1). W izotropowych modelach, zarówno dolne jak i górne oszacowania modułów sztywności ścinania są zawyżone w stosunku do modułu G_{12} geosyntetyków jako materiałów ortotropowych. Należy wyraźnie podkreślić, że otrzymane wielkości aproksymacyjne dotyczą zagadnień PSN, gdzie dopuszczalny jest większy zakres wartości współczynnika Poissona. Przypominamy, że w przypadku PSN (oraz płyt), z wymagań termodynamicznych wynika, że dla materiału izotropowego $\nu \in (-1,1)$, co jest identycznym ograniczeniem jak w przypadku materiału transwersalnie izotropowego z wyróżnionym kierunkiem prostopadłym do powierzchni środkowej tarczy (płyty). Ponieważ w „dolnej" aproksymacji otrzymaliśmy dla geotekstyliów $\overline{\nu} > 1/2$, to tego oszacowania i wyniku na współczynnik Poissona nie można zastosować w modelu przestrzennym, gdzie $\nu \in (-1, 1/2)$. Ta sytuacja nie występowała w przypadku kompozytów włóknistych (patrz wyniki na $\widetilde{\nu}$ i $\overline{\nu}$ w Tablicy 3.1), gdzie wartości współczynników Poissona wynikające z modeli aproksymacyjnych były zbliżone do wartości ok. 0.3.

Tablica 3.4. Dane do obliczeń przyjęto z Tablicy 2.1

Techniczne stałe sprężystości	Geosyntetyk (geosynthetics)	
	Geosiatka (geogrid)	Geowłóknina (geotextile)
$\widetilde{E}$ [MPa]	437.66	384.88
$\widetilde{\nu}$	0.319	0.498
$\widetilde{G}$ [MPa]	165.93	128.46
$\widetilde{K}_1$ [MPa]	642.47	766.72
$\widetilde{K}_2$ [MPa]	331.87	256.93
$\overline{E}$ [MPa]	186.55	7.88
$\overline{\nu}$	0.709	0.984
$\overline{G}$ [MPa]	54.57	1.99
$\overline{K}_1$ [MPa]	641.63	478.00
$\overline{K}_2$ [MPa]	109.14	3.98

Uwaga: Perkins i Eiksund w referacie pt. „*Geosynthetic properties for use in 2-D finite element pavement response models*" rozpatrywali zagadnienie aproksymacji modelu ortotropowego geosyntetyków PSN modelem izotropowym. W tym celu zastosowali metodę, którą nazwali metodą energetyczną. Ich sposób postępowania nie jest jednak metodą energetyczną i nie ma nic wspólnego z modelami aproksymacyjnymi prezentowanymi w tym opracowaniu. Autorzy ci założyli równoważność pracy (a nie energii) modelu ortotropowego i izotropowego dla dwuosiowego rozciągania tarcz PSN (jednorodnych stanów naprężenia i odkształcenia) z uzgodnionymi w modelach odkształceniami. Uzyskali Oni następujący wynik na efektywny moduł Younga i współczynnik Poissona modelu izotropowego (zastosowaliśmy tu oznaczenia konsekwentne z oznaczeniami tego opracowania, por. uwagę zamieszczoną w objaśnieniach do Tablicy 2.1):

(3.9)
$$E = \frac{1 - 0.5a + a^2 + 2.5b^2}{\frac{1}{E_1} + \frac{a^2}{E_2} - 2a\frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{b^2}{G_{12}}} , \qquad \nu = \frac{1}{4} ,$$

gdzie a i b są stałymi i zaproponowali (na podstawie obliczeń MES i uzyskanych wyników na odkształcenie pionowe w warstwach nawierzchni oraz odkształcenie poziome w warstwie betonu asfaltowego) następujące ich wartości: $a = 0.35$ i $b = 0.035$. Jeżeli zastosujemy wzór (3.9) do danych wg Tablicy 2.1, to otrzymamy następujące wyniki na moduł Younga: 539.973 MPa dla geosiatki i 393.667 MPa dla geowłókniny. Wartości te są większe niż „górne" oszacowania modułów Younga $\widetilde{E}$, które wynikają z metody energetycznej, patrz Tablica 3.4 (pierwszy wiersz). Oczywiste jest, że wyniki Perkinsa i Eiksunda nie są teoretycznie poprawne. W pkt.4.2 podaliśmy wyprowadzenie, z którego wynika graniczna wartość współczynnika Poissona, równa ¼, w modelu aproksymacyjnym kompozytu włóknistego, ale ta zbieżność wyników nie ma tu żadnego uzasadnienia, gdyż dotyczy innego modelu materiału. Formalnie wzór (3.9) nie jest poprawny, gdyż, jako dotyczący materiału izotropowego, powinien być symetryczny względem modułów Younga dla wyróżnionych kierunków 1 i 2 oraz współczynników Poissona. Wymaganą symetrię mają wzory (3.2)-(3.5).

Wnioski:

i) Z przeprowadzonej dyskusji, wynika, że model przestrzenny kompozytu z izotropową matrycą oraz siatką, której stałe sprężystości aproksymowane są zależnościami (3.2) i (3.3) ma następującą relację konstytutywną:

(3.9)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{E_M p_M}{1+\nu_M}\left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu_M}{(1-2\nu_M)}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}\right] + \frac{\widetilde{E}(1-p_M)}{1+\widetilde{\nu}}\left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\widetilde{\nu}}{(1-2\widetilde{\nu})}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}\right] \\ &= p_M \boldsymbol{\sigma}_M + (1-p_M)\boldsymbol{\sigma}_S ,\end{aligned}$$

gdzie w (3.9) podstawiamy (3.2) i (3.3). Tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ jest uśrednieniem tensorów naprężenia: w matrycy $\boldsymbol{\sigma}_M$ i w siatce $\boldsymbol{\sigma}_S$, które wynikają z modelu aproksymacyjnego.

ii) Przestrzenny model ortotropowy kompozytu o izotropowej matrycy zbrojonej ortotropową siatką PSN ma następującą relację konstytutywną:

(3.10)
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{\mathbf{ort}} . \boldsymbol{\varepsilon} ,$$

gdzie

(3.11)
$$\mathbf{C}_{\mathbf{ort}} = p_M \mathbf{C}_M + p_S \mathbf{C}_{PSN} .$$

Zakładamy, że $p_M + p_S \le 1$, gdzie obecnie p_S jest udziałem objętościowym siatki w reprezentatywnej objętości kompozytu. Tensor czwartego rzędu $\mathbf{C}_{PSN}$ (o symetrii ortotropii) jest tensorem sztywności siatki jako kontynualnego modelu ortotropowego (patrz pkt.5.1).

Literatura do pkt. I

Boehler J.P. [ed], *Applications of tensor functions in solid mechanics*, CISM Courses and Lectures No. 292, Springer-Verlag, Wien-New York, 1987.

Bugajski M., Grabowski W.: Geosyntetyki w budownictwie drogowym, WPP, Poznań, 1999.

Garbarski J.: *Materiały i kompozyty niemetalowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2001.

Gibson L.J., Ashby M.F.: *Cellular solids: structure and properties,* Pergamon Press, Oxford-Toronto, 1988.

Gołos M., Metody projektowania podbudów z kruszyw zbrojonych geosiatkami na słabym podłożu, Drogownictwo, 7-8, 2005, str.222-228.
Hashin Z., Rosen B.W., The elastic moduli of fiber reinforced materials, J. Appl. Mech., June 1964, pp. 223-232.
Hashin Z., Analysis of composite materials – A survey, J. Appl. Mech., 50, 1983, pp. 481-505.
Hayes M., Connexions between the moduli for anisotropic elastic materials, J. Elasticity, 2, pp. 135-141, 1972.
Hearmon R.F.S., *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*, Oxford University Press, 1961.
Kurnik W., Tylikowski A., *Mechanika elementów laminowanych*, OW PW, Warszawa 1997.
Jemioło S., *Applications of invariants of double symmetric fourth-order tensors in optimization theory of elastic anisotropic materials*, Reports to the Ford Motor Company, Design Optimization/Vehicle Safety, Research Department-Scientific Research Laboratories, Dearborn Michigan, 1999.
Jemioło S., Programy „ut tensio sic vis” Część I. Grupy symetrii materiałów Hooke'a. Moduły Kelvina i projektory, Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport Nr 1(17) 2003, Z. Strzyżakowski [red], str. 215-222, Radom 2003.
Jemioło S., Lewiński P., Kwieciński M., Wojewódzki W., Tensor and vector-valued constitutive models for nonlinear analysis of reinforced concrete structures, in Inelastic Solids and Structures, Antoni Sawczuk Memorial Volume, ed. M. Kleiber and J.A. Konig, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp.197-209, 1990.
Nemat-Nasser S., Hori M., Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials, North-Holland, Amsterdam, 1993.
Perkins S.W.: Constitutive modeling of geosynthetics, Geotextiles and Geomembranes, vol.18, pp.273-292, 2000.
Piłat J., Radziszewski P., *Nawierzchnie asfaltowe*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2004.
Rychlewski J., „CEIIINOSSSTTUV” Mathematical structure of elastic bodies, Report of the Institute for Problems in Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR (in Russian), No. 217, Moscow, 1983.
Rychlewski J., A qualitative approach to Hooke's tensors. Part I, Arch. Mech., 52 (4-5), pp. 737-759, 2000.
Rychlewski J., A qualitative approach to Hooke's tensors. Part II, Arch. Mech., 53 (1), pp. 45-63, 2001.
Spencer A.J.M., *Deformations of fibre-reinforced materials*, Oxford University Press, 1972.
Sybilski D. [przew. Grupy Roboczej], Katalog typowych konstrukcji nawierzchni podatnych i półsztywnych, Instytut Badawczy Dróg i Mostów, Branżowy Ośrodek Informacji Naukowej, Technicznej i Ekonomicznej Drogownictwa, Warszawa 1997.
Sybilski D. [przew. Grupy Roboczej], Katalog wzmocnień i remontów nawierzchni podatnych i półsztywnych, Instytut Badawczy Dróg i Mostów, Branżowy Ośrodek Informacji Naukowej, Technicznej i Ekonomicznej Drogownictwa, Warszawa 2001.
Wesolowski A., Krzywosz Z., Brandyk T.: Geosyntetyki w konstrukcjach inżynierskich, WSGGW, Warszawa, 2000.
Zawadzki J., Sybilski D., Skierczyński P., Zalecenia stosowania geowyrobów w warstwach asfaltowych nawierzchni drogowych, Instytut Badawczy Dróg i Mostów, Branżowy Ośrodek Informacji Naukowej, Technicznej i Ekonomicznej Drogownictwa, Warszawa 2004.